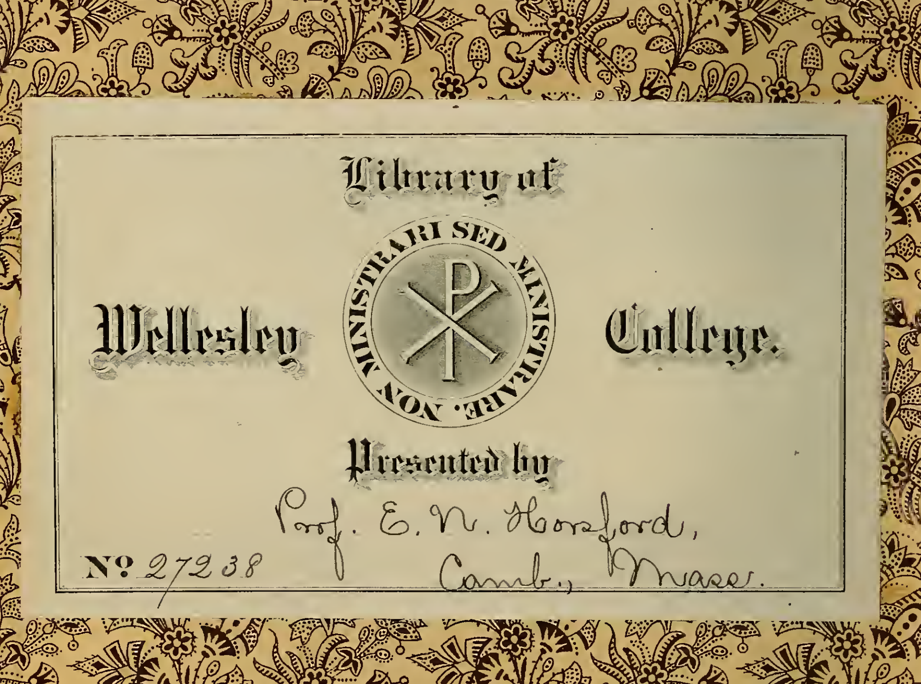




Library of
Wellesley
NON MINISTRARI SED MINISTRARE.
College.
Presented by
Prof. E. N. Horsford,
Camb., Mass.
No. 27238



DIE EBENEN

CURVEN DRITTER ORDNUNG.

EINE ZUSAMMENSTELLUNG

IHRER BEKANNTEREN EIGENSCHAFTEN

BEARBEITET VON

DR. H. DURÈGE,

ORD. PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT ZU PRAG.



MIT 44 FIGUREN IN HOLZSCHNITT.

LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1871.

VORREDE.

Die vorliegende Schrift entstand aus dem Wunsche, die Uebersicht über die grosse Zahl der bekannteren Eigenschaften der Curven dritter Ordnung möglichst zu erleichtern.

Dabei gab, abgesehen von anderen Schwierigkeiten, die Beantwortung der Frage, welche unter den zur Anwendung kommenden Sätzen aus der Geometrie der geraden Linie und der Kegelschnitte einer näheren Erörterung zu unterziehen, und welche als bekannt anzunehmen seien, zu mancherlei Zweifeln Anlass. Schliesslich schien es am angemessensten, so wenig wie möglich vorauszusetzen. Demgemäss ist fast nichts als bekannt angenommen worden, als die harmonischen Eigenschaften des vollständigen Vierecks und Vierseits; dagegen sind alle, oder doch fast alle Hülfssätze, welche bei den Curven dritter Ordnung zur Anwendung gelangen, in einer besonderen Abtheilung zusammengestellt. In den vereinzelten Fällen, in denen die Erörterung eines Hülfssatzes unterlassen wurde, ist jedesmal auf solche Schriften verwiesen, von denen angenommen werden konnte, dass sie in Jedermanns Händen sind.

Die Figuren wurden zwar in einigen Fällen von vorher gezeichneten Curven abgenommen, meistens aber sind sie nur symbolisch dargestellt, theils wegen der leichteren Ausführbarkeit, theils aber, weil sie so zur Uebersicht geeigneter erschienen.

Unter den citirten Werken kommen die beiden folgenden: Salmon, A treatise on the higher plane curves. Dublin

1852, und Cremona, Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane. Bologna 1862 (auch in's Deutsche übertragen von Curtze: Einleitung in eine geometrische Theorie der ebenen Curven. Greifswald 1865) bei weitem am häufigsten vor. Daher sind die Titel derselben öfters in abgekürzter Form „H. pl. Cvs" und „Cve piane" angeführt, oft auch gauz weggelassen worden. Ueberall da, wo hinter den Namen Salmon oder Cremona ein weiterer Zusatz sich nicht angegeben findet, sind demnach die angeführten Werke zu verstehen.

In den am Schlusse beigefügten Zusätzen sind einige Bemerkungen enthalten, deren Hinzufügung während des Druckes als wünschenswerth erschien.

Die speciellen Modificationen, welche die Eigenschaften der Curven dritter Ordnung durch das Auftreten eines Doppel- oder Rückkehrpunctes erleiden, wurden von der Behandlung vorläufig ausgeschlossen.

Prag, 5. Juli 1871.

H. Durège.

Inhalt.

Erste Abtheilung.

Hülfssätze.

Erster Abschnitt.

Algebraische Hülfssätze.

Zweiter Abschnitt.

Hülfssätze aus der Geometrie der geraden Linie.

Dritter Abschnitt.

Hülfssätze über Kegelschnitte.

Vierter Abschnitt.

Hülfssätze über algebraische Curven.

Fünfter Abschnitt.

Hülfssätze über eine von *Steiner* aufgestellte Verwandtschaft.

Seite

Zweite Abtheilung.

Curven dritter Ordnung.

Erster Abschnitt.

Einleitende Sätze.

Zweiter Abschnitt.

Erzeugung der Curven dritter Ordnung.

Dritter Abschnitt.

Die gerade und die conische Polare eines Punctes.

Vierter Abschnitt.

Die Poloconik einer Geraden.

Fünfter Abschnitt.

Die gemischte Poloconik zweier Geraden.

Seite

Sechster Abschnitt.

Wendepuncte, Wendetangenten, harmonische Polaren.

Siebenter Abschnitt.

Tangenten aus Curvenpuncten. Correspondirende Puncte und Punctepaare. Punctquadrupel.

Achter Abschnitt.

Conjugirte Pole der Hesse'schen Curve.

Neunter Abschnitt.

Die Cayley'sche Curve.

Zehnter Abschnitt.

Der begleitende Kegelschnitt.

Elfter Abschnitt.

Die Poloconik einer Geraden in Verbindung mit der Hesse'schen Curve. Kegelschnitte, welche eine Curve dritter Ordnung in drei Puncten berühren.

Zwölfter Abschnitt.

Kegelschnitte, welche eine Curve dritter Ordnung dreipunctig berühren (osculiren).

Dreizehnter Abschnitt.

Curvenbüschel dritter Ordnung.

Alphabetisches Verzeichniss der vorkommenden Kunstausdrücke.

(Die Zahlen beziehen sich auf die Artikel.)

Erste Abtheilung.

Hülfssätze.

Erster Abschnitt.

Algebraische Hülfssätze.

§. 1.

1. Bedeutet $u(x_1, x_2, x_3)$ oder kürzer geschrieben u_x eine ganze rationale homogene Function n^{ten} Grades von den Variabeln x_1, x_2, x_3, und bezeichnet man mit y_1, y_2, y_3 drei neue Variabele, so soll unter dem Zeichen

$$\Delta_y(u_x)$$

die durch die Gleichung

$$\Delta_y(u_x) = y_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + y_3 \frac{\partial u}{\partial x_3}$$

definirte Operation, und unter dem Zeichen

$$\Delta_y{}^k(u_x)$$

das Resultat der k-maligen Wiederholung dieser Operation verstanden werden. (*Salmon.* Higher plane Curves, pag. 56.)

Alsdann unterscheiden sich die Ausdrücke

$$\Delta_y(u_x),\ \Delta_y{}^2(u_x),\ \Delta_y{}^3(u_x),\ \text{etc.}$$

von den totalen Differentialen du, d^2u, d^3u, etc. nur dadurch, dass die Grössen y_1, y_2, y_3 an Stelle der Differentiale dx_1, dx_2, dx_3 getreten sind. Es ist demnach

$$\Delta_y(u_x) = \Sigma y_i \frac{\partial u}{\partial x_i},\quad \Delta_y{}^2(u_x) = \Sigma\Sigma y_h y_i \frac{\partial^2 u}{\partial x_h\, \partial x_i},$$

$$\Delta_y{}^3(u_x) = \Sigma\Sigma\Sigma y_h y_i y_k \frac{\partial^3 u}{\partial x_h\, \partial x_i\, \partial x_k},\quad \text{u. s. w.},$$

wobei jedem der Indices h, i, k, etc. die Werthe 1, 2, 3 beizulegen sind.

2. Hieraus folgen sofort folgende Eigenschaften dieser Ausdrücke Δ:

$$(1) \quad \ldots\ldots \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\Delta_y{}^k(u_x)\right] = \Delta_y{}^k\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)$$

$$(2) \quad \ldots\ldots \frac{\partial}{\partial y_i}\left[\Delta_y{}^k(u_x)\right] = k\Delta_y{}^{k-1}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right).^{*)}$$

*) Die Richtigkeit der ersten Formel leuchtet unmittelbar ein; für die zweite ist eine Ableitung in [5] mitgetheilt.

Bezeichnet ferner v_x eine zweite Function von derselben Natur wie u_x, so ist

$$\Delta_y(u_x v_x) = u_x \Delta_y(v_x) + v_x \Delta_y(u_x).$$

3. Wenn man die Operation Δ auf's Neue auf einen Ausdruck von der Form $\Delta_y^k(u_x)$ anwendet, so sollen die dabei auszuführenden Differentiationen sich auf die durch den Buchstaben x, welcher als Index bei u steht, bezeichneten Variabeln beziehen. In diesem Sinne ist

$$\Delta_y^k(\Delta_y^l(u_x)) = \Delta_y^{k+l}(u_x)$$
$$\Delta_z^l(\Delta_y^k(u_x)) = \Delta_y^k(\Delta_z^l(u_x)),$$

d. h. wendet man die Operation k Mal mit den Grössen y und l Mal mit den Grössen z an, so ist es gleichgültig, in welcher Ordnung dies geschieht. So ist z. B.

$$\Delta_z^2(u_x) = \Sigma\Sigma z_h z_k \frac{\partial^2 u}{\partial x_h \partial x_k},$$

und dann

$$\Delta_y(\Delta_z^2(u_x)) = \Sigma\Sigma\Sigma y_i z_h z_k \frac{\partial^3 u}{\partial x_i \partial x_h \partial x_k}.$$

Dasselbe Resultat erhält man aber auch, wenn man aus

$\Delta_y(u_x) = \Sigma y_i \frac{\partial u}{\partial x_i}$ bildet $\Delta_z^2(\Delta_y(u_x))$.

4. Entwickelt man die Function

$$U = u(x_1 + \lambda y_1,\ x_2 + \lambda y_2,\ x_3 + \lambda y_3)$$

nach Potenzen von λ, so erhält man

$$U = u_x + \lambda \Delta_y(u_x) + \frac{\lambda^2}{2!}\Delta_y^2(u_x) + \frac{\lambda^3}{3!}\Delta_y^3(u_x) + \cdots + \frac{\lambda^n}{n!}\Delta_y^n(u_x).$$

Dies ergiebt sich mit Rücksicht auf [1] unmittelbar, wenn man sich erinnert, dass die Taylor'sche Reihe in folgender Form geschrieben werden kann:

$$u(x_1 + dx_1,\ x_2 + dx_2,\ x_3 + dx_3)$$
$$= u_x + du + \frac{d^2u}{2!} + \frac{d^3u}{3!} + \cdots + \frac{d^n u}{n!}.$$

5. Wenn man in den Ausdrücken Δ die Variabeln x und y mit einander vertauscht, so gilt die Beziehung

$$\frac{\Delta_y^k(u_x)}{k!} = \frac{\Delta_x^{n-k}(u_y)}{(n-k)!},$$

d. h. es ist der Reihe nach

$$u_x = \frac{\Delta_x^{\,n}(u_y)}{n!}, \quad \Delta_y(u_x) = \frac{\Delta_y^{\,n-1}(u_y)}{(n-1)!}, \quad \ldots,$$

$$\frac{\Delta_y^{\,n-1}(u_x)}{(n-1)!} = \Delta_x(u_y), \quad \frac{\Delta_y^{\,n}(u_x)}{n!} = u_y$$

Beweis. Setzt man

$$U = u(\mu x_1 + \lambda y_1,\ \mu x_2 + \lambda y_2,\ \mu x_3 + \lambda y_3),$$

so kann man dies in doppelter Weise nach Potenzen von μ und λ entwickeln. Zieht man nämlich einmal μ^n als Factor heraus, wodurch man

$$U = \mu^n \cdot u\left(x_1 + \frac{\lambda}{\mu}\, y_1,\ \ x_2 + \frac{\lambda}{\mu}\, y_2,\ \ x_3 + \frac{\lambda}{\mu}\, y_3\right)$$

erhält, so kann man dies nach [4] nach Potenzen von $\frac{\lambda}{\mu}$ entwickeln und erhält, wenn man wieder die Multiplication mit μ^n vollzieht

$$U = \mu^n u_x + \mu^{n-1} \lambda \Delta_y(u_x) + \frac{\mu^{n-2} \lambda^2}{2!} \Delta_y^2(u_x) + \ldots$$
$$+ \frac{\mu \lambda^{n-1}}{(n-1)!} \Delta_y^{n-1}(u_x) + \frac{\lambda^n}{n!} \Delta_y^n(u_x).$$

Wenn man dagegen λ^n als Factor herauszieht, dann den entstehenden Ausdruck

$$U = \lambda^n \cdot u\left(\frac{\mu}{\lambda}\, x_1 + y_1,\ \ \frac{\mu}{\lambda}\, x_2 + y_2,\ \ \frac{\mu}{\lambda}\, x_3 + y_3\right)$$

nach Potenzen von $\frac{\mu}{\lambda}$ entwickelt und darauf wieder mit λ^n multiplicirt, so erhält man

$$U = \lambda^n u_y + \mu \lambda^{n-1} \Delta_x(u_y) + \frac{\mu^2 \lambda^{n-2}}{2!} \Delta_x^2(u_y) + \ldots$$
$$+ \frac{\mu^{n-1} \lambda}{(n-1)!} \Delta_x^{n-1}(u_y) + \frac{\mu^n}{n!} \Delta_x^n(u_y).$$

Da nun beide Entwickelungen identisch sein müssen, so ergiebt die Vergleichung der gleichnamigen Glieder die obigen Beziehungen.

Zusatz. Hieraus erhellt die Richtigkeit der Formel (2) in [2]. Vertauscht man nämlich x mit y, so kann man die Formel (1) anwenden und erhält

$$\frac{\partial}{\partial y_i}\left[\varDelta_y^k(u_x)\right] = \frac{k!}{(n-k)!}\frac{\partial}{\partial y_i}\left[\varDelta_x^{n-k}(u_y)\right] = \frac{k!}{(n-k)!}\varDelta_x^{n-k}\left(\frac{\partial u}{\partial y_i}\right).$$

Da nun aber $\frac{\partial u}{\partial y_i}$ vom Grade $n-1$ ist, und $n-1-(n-k)=k-1$ wird, so hat man

$$\frac{1}{(n-k)!}\varDelta_x^{n-k}\left(\frac{\partial u}{\partial y_i}\right) = \frac{1}{(k-1)!}\varDelta_y^{k-1}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right),$$

woraus die gesuchte Formel folgt, wenn man noch berücksichtigt, dass $\frac{k!}{(k-1)!} = k$ ist.

6. Wenn in dem Ausdrucke $\varDelta_y^k(u_x)$ an Stelle der Grössen y_i die x_i gesetzt werden, so finden folgende Beziehungen statt:

$$\varDelta_x(u_x) = n \,.\, u_x, \quad \varDelta_x^2(u_x) = n(n-1)u_x, \text{ etc.}$$
$$\varDelta_x^k(u_x) = n(n-1)\,\ldots\,(n-k+1)u_x.$$

(*Euler's* Satz über homogene Functionen).

Beweis. Da u eine homogene Function n^{ten} Grades ist, so ist für jede beliebige Grösse t

$$u(x_1 t,\; x_2 t,\; x_3 t) = t^n u_x;$$

setzt man also $t = 1 + \lambda$, so folgt

$$u(x_1 + \lambda x_1,\; x_2 + \lambda x_2,\; x_3 + \lambda x_3) = (1+\lambda)^n u_x.$$

Entwickelt man nun beiderseits nach Potenzen von λ, was link nach [4], und rechts nach dem binomischen Satze geschieht, so erhält man

$$u_x + \lambda\varDelta_x(u_x) + \frac{\lambda^2}{2!}\varDelta_x^2(u_x) + \ldots + \frac{\lambda^k}{k!}\varDelta_x^k(u_x) + \ldots$$
$$= u_x + \lambda n u_x + \lambda^2\frac{n(n-1)}{2!}u_x + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}\lambda^k . u_x . + \ldots$$

und hieraus durch Vergleichung der gleichnamigen Coefficienten die obigen Beziehungen. (*Serret.* Algèbre sup. II. pag. 567.)

§. 2.

7. Eliminirt man aus zwei homogenen Gleichungen zwischen drei Variabeln x, y, z resp. von den Graden m und n, eine dieser Variabeln, z. B. z, so ist das Resultat der Elimination eine homogene Gleichung zwischen x und y vom Grade mn.

Beweis. Bezeichnet man mit u_h und v_h homogene Functionen h^{ten} Grades der Variabeln x und y, so kann man die beiden gegebenen Gleichungen so schreiben:

$$(1) \qquad u_0 z^n + u_1 z^{n-1} + \ldots + u_{n-1} z + u_n = 0$$
$$(2) \qquad v_0 z^m + v_1 z^{m-1} + \ldots + v_{m-1} z + v_m = 0.$$

Multiplicirt man nun die (1) nach und nach mit $z^{m-1}, z^{m-2}, \ldots z, 1$ und die (2) mit $z^{n-1}, z^{n-2}, \ldots, z, 1$, so erhält man im Ganzen $n+m$ Gleichungen, in welchen die $n+m-1$ Grössen $z^{n+m-1}, z^{n+m-2}, \ldots, z$ linear vorkommen. Die Variable z wird daher dadurch eliminirt, dass man die Determinante D aus den Coefficienten der Potenzen von z in jenen $n+m$ Gleichungen gleich Null setzt. Ist z. B. $n=3$, $m=2$, so heissen die Gleichungen (1) und (2)

$$u_0 z^3 + u_1 z^2 + u_2 z + u_3 = 0$$
$$v_0 z^2 + v_1 z + v_2 = 0.$$

Multiplicirt man die erstere mit z, 1 und die zweite mit z^2, z, 1, so erhält man

$$\begin{array}{lllllll}
u_0 z^4 & + u_1 z^3 & + u_2 z^2 & + u_3 z & & = 0 \\
 & u_0 z^3 & + u_1 z^2 & + u_2 z & + u_3 & = 0 \\
v_0 z^4 & + v_1 z^3 & + v_2 z^2 & & & = 0 \\
 & v_0 z^3 & + v_1 z^3 & + v_2 z & & = 0 \\
 & & v_0 z^2 & + v_1 z & + v_2 & = 0.
\end{array}$$

Die Elimination von z^4, z^3, z^2, z giebt dann

$$D = \begin{vmatrix} u_0 & u_1 & u_2 & u_3 & 0 \\ 0 & u_0 & u_1 & u_2 & u_3 \\ v_0 & v_1 & v_2 & 0 & 0 \\ 0 & v_0 & v_1 & v_2 & 0 \\ 0 & 0 & v_0 & v_1 & v_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Um nun zu zeigen, dass die so gewonnene Determinante D eine homogene Function von x und y vom Grade nm ist, substituire man darin tx und ty statt x und y. Dann gehen u_h und v_h über in $t^h u_h$ und $t^h v_h$. Bezeichnet man die so abgeänderte Determinante mit D', so wird in unserem Beispiele

$$D' = \begin{vmatrix} u_0 & tu_1 & t^2u_2 & t^3u_3 & 0 \\ 0 & u_0 & tu_1 & t^2u_2 & t^3u_3 \\ v_0 & tv_1 & t^2v_2 & 0 & 0 \\ 0 & v_0 & tv_1 & t^2v_2 & 0 \\ 0 & 0 & v_0 & tv_1 & t^2v_2 \end{vmatrix}.$$

Man multiplicire nun, um in allen Elementen einer Columne denselben Exponenten von t zu erhalten, die Zeilen der u der

Reihe nach mit $1, t, t^2, \ldots t^{m-1}$, und die Zeilen der v mit $1, t, t^2, \ldots, t^{n-1}$; dann hat die Potenz von t, mit welcher D' im Ganzen multiplicirt ist, den Exponenten

$$1+2+\ldots+(m-1)+1+2+\ldots+(n-1)=\frac{m(m-1)}{2}+\frac{n(n-1)}{2},$$

man erhält dadurch

$$t^{\frac{m(m-1)+n(n-1)}{2}} D'.$$

Durch diese Multiplication haben nun aber die Columnen von D' der Reihe nach folgende Potenzen von t als gemeinschaftliche Factoren erhalten:

$$1, t, t^2, \ldots t^{n+m-1}.$$

Zieht man diese alle heraus, so erhält man als Factor der ursprünglichen Determinante D eine Potenz von t mit dem Exponenten

$$1+2+\ldots+(n+m-1)=\frac{(n+m)(n+m-1)}{2}=nm+\frac{m(m-1)+n(n-1)}{2}.$$

Daher ergiebt sich

$$t^{\frac{m(m-1)+n(n-1)}{2}} D' = t^{nm+\frac{m(m-1)+n(n-1)}{2}} D$$

oder

$$D' = t^{nm} D,$$

und folglich ist D in der That eine homogene Function vom Grade nm.

8. Ist u eine homogene Function n^{ten} Grades von x und y und daher $u=0$ eine Gleichung n^{ten} Grades für die Unbekannte $\frac{x}{y}$, so besteht die Bedingung, dass diese Gleichung zwei gleiche Wurzeln hat, in den Gleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial u}{\partial y}=0.$$

Beweis. Setzt man $\frac{x}{y}=\xi$ und bezeichnet die oben erwähnte Gleichung mit $f(\xi)=0$, so ist

$$u = y^n f(\xi).$$

Nun hat die Gleichnng $f(\xi)=0$ zwei gleiche Wurzeln, wenn gleichzeitig $f(\xi)=0$ und $\frac{df}{d\xi}=0$ ist. Es ist aber $\frac{\partial \xi}{\partial x}=\frac{1}{y}$ und daher

$$\frac{\partial u}{\partial x}=y^{n-1}\frac{df}{d\xi},$$

folglich können die letzten Bedingungen ersetzt werden durch

$$u = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Nach dem *Euler*'schen Satze [6] ist aber

$$u = \frac{1}{n}\left(x\frac{\partial u}{\partial x} + y\,\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

folglich ist auch $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$. Wenn umgekehrt $\frac{\partial u}{\partial x}$ und $\frac{\partial u}{\partial y}$ gleichzeitig verschwinden, so ist auch $u = 0$ und daher verschwinden auch $f(\xi)$ und $\frac{df}{d\xi}$ gleichzeitig.

9. Um nach diesem Satze die Bedingung zu finden, unter welcher die cubische Gleichung

$$(1) \qquad ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

zwei gleiche Wurzeln hat, setze man

$$u = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3$$

und bilde

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3ax^2 + 2bxy + cy^2 = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = bx^2 + 2cxy + 3dy^2 = 0.$$

Eliminirt man hieraus einmal x^2 und dann y^2, so erhält man nach Unterdrückung der Factoren y und x

$$(2b^2 - 6ac)x + (bc - 9ad)\,y = 0$$
$$(bc - 9ad)\,x + (2c^2 - 6bd)y = 0,$$

und hieraus durch Elimination von x und y

$$(bc - 9ad)^2 - 4(b^2 - 3ac)(c^2 - 3bd) = 0.$$

Dies ist die gesuchte Bedingung für die Gleichheit zweier Wurzeln der Gleichung (1). Durch Entwickelung und Division mit 3 lässt sie sich auch in die Form

$$b^2(4bd - c^2) + a(4c^3 - 18bcd + 27ad^2) = 0$$

bringen. (*Salmon.* pag. 296.)

§. 3.

10. Bedeuten 1, α, α^2 die Cubikwurzeln der Einheit, so ist identisch

$$(x + y + z)(x + \alpha y + \alpha^2 z)(x + \alpha^2 y + \alpha z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz.$$

Dies ergiebt sich unmittelbar durch Ausführung der Multiplication unter Berücksichtigung der Gleichungen $\alpha^3 = 1$ und $1 + \alpha + \alpha^2 = 0$.

Da der rechts stehende Ausdruck in Beziehung auf x, y, z symmetrisch ist, so ändert sich auch der links stehende Ausdruck nicht, wenn man x, y, z mit einander vertauscht. Daher ist gleichzeitig

$$\begin{aligned} x^3+y^3+z^3-3xyz &= (x+y+z)(x+\alpha y+\alpha^2 z)(x+\alpha^2 y+\alpha z) \\ &= (x+y+z)(\alpha x+y+\alpha^2 z)(\alpha^2 x+y+\alpha z) \\ &= (x+y+z)(\alpha x+\alpha^2 y+z)(\alpha^2 x+\alpha y+z). \end{aligned}$$

Substituirt man in der ersten dieser Gleichungen αx für x, so folgt

$$\begin{aligned} x^3+y^3+z^3-3\alpha xyz &= (\alpha x+y+z)(\alpha x+\alpha y+\alpha^2 z)(\alpha x+\alpha^2 y+\alpha z) \\ &= \alpha^2(\alpha x+y+z)(x+\alpha y+z)(x+y+\alpha z), \end{aligned}$$

und wenn man $\alpha^2 x$ für x substituirt,

$$\begin{aligned} x^3+y^3+z^3-3\alpha^2 xyz &= (\alpha^2 x+y+z)(\alpha^2 x+\alpha y+\alpha^2 z)(\alpha^2 x+\alpha^2 y+\alpha z) \\ &= \alpha(\alpha^2 x+y+z)(x+\alpha^2 y+z)(x+y+\alpha^2 z), \end{aligned}$$

Zweiter Abschnitt.

Hülfssätze aus der Geometrie der geraden Linie.

§. 1.

11. Bedeuten ξ und η die recht- oder schiefwinkligen Coordinaten eines Puncts, und besteht zwischen diesen eine lineare Gleichung: $\alpha\xi+\beta\eta+\gamma=0$, so ist der Punct (ξ, η) veränderlich und beschreibt eine gerade Linie. Bezeichnet man nun mit x_1, x_2, x_3 drei Grössen, welche linearen Functionen von ξ, η proportional sind, indem man setzt

$$x_1 : x_2 : x_3 = \alpha_1\xi+\beta_1\eta+\gamma_1 : \alpha_2\xi+\beta_2\eta+\gamma_2 : \alpha_3\xi+\beta_3\eta+\gamma_3,$$

oder mit Anwendung eines Proportionalitätsfactors ϱ

$$(1) \qquad \begin{aligned} x_1 &= \varrho(\alpha_1\xi+\beta_1\eta+\gamma_1) \\ x_2 &= \varrho(\alpha_2\xi+\beta_2\eta+\gamma_2) \\ x_3 &= \varrho(\alpha_3\xi+\beta_3\eta+\gamma_3), \end{aligned}$$

so bemerkt man sogleich, dass die Werthe von ξ und η daraus bestimmt werden können, so bald die beiden Verhältnisse der drei Grössen x_1, x_2, x_3 gegeben sind. Durch diese Verhältnisse wird also ein Punct in der Ebene fixirt. Besteht

aber zwischen ihnen eine lineare, und daher zwischen x_1, x_2, x_3 eine homogene lineare Gleichung von der Form

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0,$$

so erhält man, wenn man hierin die Ausdrücke (1) substituirt, eine lineare Gleichung zwischen ξ, η. Der von den Verhältnissen von x_1, x_2, x_3 abhängige Punct ist also alsdann veränderlich, muss aber eine gewisse Gerade beschreiben. Bezeichnet man ferner mit X_1, X_2, X_3 drei homogene lineare Functionen von x_1, x_2, x_3, indem man setzt

$$\begin{aligned} X_1 &= a_1' x_1 + a_2' x_2 + a_3' x_3 \\ X_2 &= a_1'' x_1 + a_2'' x_2 + a_3'' x_3 \qquad (2) \\ X_3 &= a_1''' x_1 + a_2''' x_2 + a_3''' x_3, \end{aligned}$$

(worin die rechten Theile ebenfalls mit einem willkürlichen Proportionalitätsfactor behaftet sein können), so behalten die Grössen X_1, X_2, X_3 die beiden vorhin von den Grössen x_1, x_2, x_3 bemerkten Eigenschaften bei. Nämlich: sind die beiden Verhältnisse der X gegeben, so kann man mittelst der vorigen Gleichungen die beiden Verhältnisse der x, und dann mittelst der Gleichungen (1) die Werthe von ξ, η bestimmen. Die beiden Verhältnisse der X bestimmen also die Lage eines Punctes. Besteht ferner zwischen den X eine homogene lineare Gleichung $b_1 X_1 + b_2 X_2 + b_3 X_3 = 0$, so wird diese durch Substitution der Ausdrücke (2) eine homogene lineare Gleichung zwischen den x, und durch Substitution der Ausdrücke (1) eine lineare Gleichung zwischen ξ und η. Wenn demnach zwischen den X eine homogene lineare Gleichung besteht, so beschreibt der durch die Verhältnisse der X bestimmte Punct eine gerade Linie. Man sieht übrigens, dass die Grössen X von den x nicht wesentlich verschieden sind; denn substituirt man in (2) die Ausdrücke (1), so werden die X lineare Functionen von ξ, η, die sich von den x nur durch die Werthe der Constanten unterscheiden.

12. Hieraus fliesst folgende Definition: Unter homogenen Punctcoordinaten werden irgend drei Grössen x_1, x_2, x_3 verstanden, welche folgende zwei Eigenschaften haben, dass 1) durch ihre beiden Verhältnisse die Lage eines Punctes in der Ebene bestimmt wird, und dass 2) der von diesen Verhältnissen abhängige Punct eine gerade Linie beschreibt, wenn

zwischen jenen Grössen x_1, x_2, x_3 eine homogene lineare Gleichung besteht. — Denn wenn diese Bedingungen erfüllt sind, kann man die Grössen x_1 x_2 x_3 linearen Functionen zweier Parallelcoordinaten proportional setzen, d. h. drei Gleichungen von der Form (1) aufstellen*).

13. Die einfachsten Gleichungen gerader Linien, die man in homogenen Punctcoordinaten bilden kann, sind die folgenden

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 0$$

oder nach (1) in Parallelcoordinaten ausgedrückt

$$\alpha_1 \xi + \beta_1 \eta + \gamma_1 = 0, \quad \alpha_2 \xi + \beta_2 \eta + \gamma_2 = 0, \quad \alpha_3 \xi + \beta_3 \eta + \gamma_3 = 0.$$

Das von diesen Geraden gebildete Dreieck heisst das Fundamentaldreieck (Coordinatendreieck), und auf dieses beziehen sich x_1, x_2, x_3 als Coordinaten eines Puncts. Die den Seiten $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ desselben der Reihe nach gegenüberliegenden Ecken sollen künftig mit *I*, *II*, *III* bezeichnet werden. Führt man statt der x drei lineare homogene Functionen derselben, X, als Coordinaten ein, so beziehen sich diese auf ein Fundamentaldreieck, dessen Seiten sind:

$$X_1 = 0, \quad X_2 = 0, \quad X_3 = 0.$$

14. Die homogenen Coordinaten x_1, x_2, x_3 eines Punctes sind von den Perpendikeln, die man von diesem Puncte auf die Seiten des Fundamentaldreieckes herablassen kann, nur durch constante Factoren verschieden; jedoch kann bei jedem der drei Perpendikel der constante Factor einen anderen Werth haben.

Beweis. Ist $\alpha \xi + \beta \eta + \gamma = 0$ die Gleichung einer Geraden in Parallelcoordinaten, und ω der Coordinatenwinkel, so ist die Länge p des von einem Puncte (ξ, η) auf diese Gerade gefällten Perpendikels (*Salmon.* Anal. Geom. d. Kegelschn., deutsch von *Fiedler*, 2. Aufl. pag. 31.)

$$p = \frac{\sin \omega (\alpha \xi + \beta \eta + \gamma)}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - 2 \alpha \beta \cos \omega}},$$

---

*) Dieser Definition steht die folgende gegenüber: Unter homogenen Liniencoordinaten werden irgend drei Grössen verstanden, welche die Eigenschaften besitzen, dass 1) ihre beiden Verhältnisse die Lage einer Geraden in der Ebene bestimmen, und dass 2) die von diesen Verhältnissen abhängige Gerade sich um einen Punct dreht, wenn zwischen jenen Grössen eine homogene lineare Gleichung besteht.

oder setzt man

$$\frac{\sin\omega}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta\cos\omega}}=A,$$

so ist

$$p=A(\alpha\xi+\beta\eta+\gamma).$$

Darin hängt die Grösse A nur von der Lage der Geraden, keinesweges aber von der Lage des Punctes ab, behält also für alle Puncte denselben Werth. Nimmt man nun die Seiten des Fundamentaldreiecks als die Geraden an, auf welche von dem Puncte (ξ, η) Perpendikel gefällt sind, indem man den Constanten α, β, γ und dann auch A und p Indices beifügt, so hat man

$$p_1=A_1(\alpha_1\xi+\beta_1\eta+\gamma_1)$$
$$p_2=A_2(\alpha_2\xi+\beta_2\eta+\gamma_2)$$
$$p_3=A_3(\alpha_3\xi+\beta_3\eta+\gamma_3),$$

und dann wegen der Gleichungen (1) in [11]

$$p_1:p_2:p_3=A_1x_1:A_2x_2:A_3x_3,$$

oder mit Anwendung eines Proportionalitätsfactors ϱ

(1) $$p_1=\varrho A_1x_1,\quad p_2=\varrho A_2x_2,\quad p_3=\varrho A_3x_3.$$

15. Der vorige Satz macht es möglich, über die Vorzeichen, welche den homogenen Coordinaten eines Punctes bei dessen verschiedenen Lagen beizulegen sind, etwas Bestimmtes festzusetzen. Bekanntlich wechselt das von einem Puncte auf eine Gerade gefällte Perpendikel das Vorzeichen, wenn der Punct die Gerade überschreitet. Nach den vorigen Formeln kommt daher dieselbe Eigenschaft der Coordinate x_i zu, wenn der Punct die Seite $x_i=0$ des Fundamentaldreiecks überschreitet. Nun theilt jede Fundamentalseite die Ebene so in zwei Theile, dass das Fundamentaldreieck sich ganz in dem einen dieser beiden Theile befindet. Daher wollen wir festsetzen, dass das von einem Puncte auf die Seite $x_i=0$ gefällte Perpendikel p_i dann als positiv betrachtet werden soll, wenn der Punct in demjenigen der beiden durch die Gerade $x_i=0$ von einander getrennten Theile liegt, in dem sich das Fundamentaldreieck befindet, negativ, wenn er in dem andern Theile liegt. Sind dann für ein bestimmtes System homogener Coordinaten die Verhältnisse der Grössen A gewählt, so bestimmen sich hiernach auch die Vorzeichen der Coordinaten.

16. Alle in unendlicher Entfernung befindlichen Puncte können als auf einer geraden Linie liegend angesehen werden, welche die unendlich ferne Gerade heisst. Die Gleichung derselben ist

$$s_1 A_1 x_1 + s_2 A_2 x_2 + s_3 A_3 x_3 = 0,$$

wenn s_1, s_2, s_3 die Längen der Seiten des Fundamentaldreiecks bezeichnen.

Beweis. Um die Coordinaten des Durchschnittes zweier Geraden

$$(1) \quad a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0, \quad b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 = 0$$

zu bestimmen, hat man aus diesen beiden Gleichungen die Verhältnisse der x zu berechnen. Das giebt

$$(2) \quad x_1 : x_2 : x_3 = a_2 b_3 - a_3 b_2 : a_3 b_1 - a_1 b_3 : a_1 b_2 - a_2 b_1.$$

Man kann aber auch noch anders verfahren. Verbindet man nämlich den Punct $(x_1\, x_2\, x_3)$ durch gerade Linien mit den Ecken des Fundamentaldreiecks, so wird dieses in drei (positive oder negative) Dreiecke zerlegt. Nennt man daher F den doppelten Inhalt des Fundamentaldreiecks, so hat man mit Berücksichtigung der in [15] gegebenen Zeichenregel

$$s_1 p_1 + s_2 p_2 + s_3 p_3 = F,$$

oder nach den Formeln (1) in [14]

$$\varrho (s_1 A_1 x_1 + s_2 A_2 x_2 + s_3 A_3 x_3) = F.$$

Man kann nun diese stets stattfindende Gleichung den Gleichungen (1) hinzufügen und dann Ausdrücke für die Coordinaten des Durchschnittspuncts selbst finden. Setzt man

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ s_1 A_1 & s_2 A_2 & s_3 A_3 \end{vmatrix} = D,$$

so giebt die Auflösung jener drei Gleichungen

$$x_1 = \frac{F}{\varrho D}(a_2 b_3 - a_3 b_2), \quad x_2 = \frac{F}{\varrho D}(a_3 b_1 - a_1 b_3),$$

$$x_3 = \frac{F}{\varrho D}(a_1 b_2 - a_2 b_1),$$

welche Ausdrücke freilich wegen des willkürlichen Factors ϱ nichts anderes besagen, als die Gleichungen (2). Sie sind aber geeignet, erkennen zu lassen, was geschieht, wenn die Geraden (1) parallel sind, also ihr Durchschnitt ins Unendliche rückt. In diesem Falle muss mindestens eine seiner Coordi-

naten unendlich gross werden, d. h. es muss $D = 0$ sein. Allein das Verschwinden dieser Determinante ist das Resultat der Elimination der Coordinaten aus den Gleichungen

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0$$
$$b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 = 0$$
$$s_1 A_1 x_1 + s_2 A_2 x_2 + s_3 A_3 x_3 = 0.$$

Daher kann ein unendlich entfernter Punct als der Durchschnitt der beiden parallelen Geraden (1) mit der Geraden

$$s_1 A_1 x_1 + s_2 A_2 x_2 + s_3 A_3 x_3 = 0$$

betrachtet werden, und da diese letzte ungeändert bleibt, wenn man die parallelen Geraden variirt, so können alle unendlich fernen Punkte als auf dieser Geraden liegend angesehen werden.

17. Unter den unendlich vielen Arten homogener Coordinaten, welche denkbar sind, und die aus der Verschiedenheit der Werthe von A_1, A_2, A_3 in [14] entstehen, sind besonders drei hervorzuheben:

1) Hessesche homogene Coordinaten. Diese sind die einfachsten unter allen und entstehen, wenn die Verhältnisse $\frac{x_1}{x_3}$ und $\frac{x_2}{x_3}$ statt der Parallelcoordinaten eingeführt werden. Da dann für alle im Unendlichen liegenden Puncte $x_3 = 0$ ist, so ist dies die Gleichung der unendlich fernen Geraden; das Fundamentaldreieck besteht daher hier aus den beiden Coordinatenaxen und der unendlich fernen Geraden.

2) Perpendikelverhältnisse. Die Verhältnisse der von einem Puncte auf die Seiten des Fundamentaldreieckes gefällten Perpendikel werden direct als die Coordinaten dieses Punctes betrachtet. Die Coefficienten A_1, A_2, A_3 werden daher dann einander gleich angenommen, und dadurch wird die Gleichung der unendlich fernen Geraden:

$$s_1 x_1 + s_2 x_2 + s_3 x_3 = 0.$$

3) Schnittverhältnisse. Diese wurden von *Chasles* aufgestellt (Géométrie supérieure. pag. 341. *Cremona* art. 36), hängen aber auf's Innigste mit den Variabeln zusammen, auf denen der barycentrische Calcul von *Möbius* beruht. Sie bestehen in Folgendem. Zieht man durch den Punct x, dessen Coordinaten x_1, x_2, x_3 sind, und durch die Ecken I, II, III des Fundamentaldreieckes drei Gerade, welche die gegenüber-

liegenden Seiten in l, m, n schneiden, so werden die Verhältnisse der Abschnitte, in welche die Fundamentalseiten durch die letzteren Puncte getheilt werden, als die Coordinaten betrachtet, indem man setzt

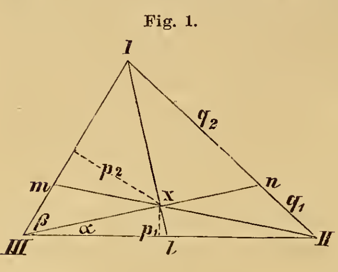
$$In : nII = x_2 : x_1, \quad II\,l : l\,III = x_3 : x_2, \quad IIIm : mI = x_1 : x_3.$$

Dies ist gestattet, weil nach dem Satze von *Ceva* (*Chasles*. Geschichte der Geometrie. Deutsch von *Sohncke*. pag. 301)

$$\frac{In \,.\, II\,l \,.\, IIIm}{nII \,.\, l\,III \,.\, mI} = 1$$

ist. Um die Beziehung dieser Schnittverhältnisse zu den Perpendikeln zu erfahren, sei (Fig. 1.) $In = q_2$, $nII = q_1$, $II\,IIIn = \alpha$, $n\,III\,I = \beta$, so hat man

Fig. 1.



$$\frac{q_1}{III\,n} = \frac{\sin\alpha}{\sin II}, \quad \frac{q_2}{III\,n} = \frac{\sin\beta}{\sin I},$$

also

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{x_1}{x_2} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \cdot \frac{\sin I}{\sin II}.$$

Bedeuten aber p_1, p_2 die von x auf die Seiten $x_1 = 0$ und $x_2 = 0$ gefällten Perpendikel, und s_1, s_2 die Längen dieser Seiten, so ist

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{p_1}{p_2}, \quad \frac{\sin I}{\sin II} = \frac{s_1}{s_2}$$

und daher

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{s_1\,p_1}{s_2\,p_2}.$$

Demnach folgt

$$x_1 : x_2 : x_3 = s_1 p_1 : s_2 p_2 : s_3 p_3,$$

oder

$$p_1 : p_2 : p_3 = \frac{x_1}{s_1} : \frac{x_2}{s_2} : \frac{x_3}{s_3}.$$

Die Coefficienten A in [14] werden daher in diesem Falle

$$A_1 : A_2 : A_3 = \frac{1}{s_1} : \frac{1}{s_2} : \frac{1}{s_3},$$

und damit erhält man die Gleichung der unendlich fernen Geraden:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0.$$

18. Bezeichnet man mit x_1, x_2, x_3 und y_1, y_2, y_3 die homogenen Coordinaten zweier Puncte x und y, so sind die Grössen

$$z_1 = x_1 + \lambda y_1, \quad z_2 = x_2 + \lambda y_2, \quad z_3 = x_3 + \lambda y_3$$

für jeden Werth von λ die Coordinaten eines Punctes, der auf der Verbindungslinie xy liegt.

Beweis. Bei veränderlichen z ist

$$a z_1 + b z_2 + c z_3 = 0$$

die Gleichung einer Geraden. Geht diese durch die Puncte x und y, so ist auch

$$a x_1 + b x_2 + c x_3 = 0$$
$$a y_1 + b y_2 + c y_3 = 0.$$

Durch Elimination von a, b, c erhält man daraus

$$\begin{vmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = 0,$$

welches bei veränderlichen z die Gleichung der Geraden xy ist. Diese Determinante verschwindet aber nicht bloss, wenn man statt der z die x oder y substituirt, sondern auch dann, wenn man setzt

$$z_i = x_i + \lambda y_i \quad (i = 1, 2, 3);$$

daher sind dies die Coordinaten eines Punctes der Geraden xy.

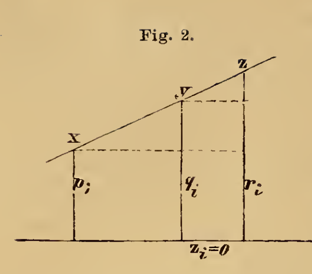
19. Bedeuten $z_i = x_i + \lambda y_i$ die Coordinaten eines Punctes z, welcher [18] auf der Verbindungslinie xy der Puncte x und y liegt, so ist die Grösse λ proportional dem Verhältnisse der Abschnitte xz und yz, in welche die Strecke xy durch den Punct z getheilt wird, nämlich es ist

$$\lambda = k \frac{xz}{yz},$$

worin k eine ganz willkürliche Grösse bedeutet, die aber denselben Werth behalten darf, wenn x und y fest bleiben.

Beweis. Auf die Seite $z_i = 0$ des Fundamentaldreieckes fälle man aus den Puncten x, y, z Perpendikel und nenne dieselben resp. p_i, q_i, r_i, so ist (Fig. 2)

$$\frac{xz}{r_i - p_i} = \frac{yz}{r_i - q_i}$$



oder

$$(r_i - q_i)\,\frac{xz}{yz} = r_i - p_i,$$

und wenn man der Kürze wegen $\frac{xz}{yz} = \mu$ setzt,

$$(1-\mu)\,r_i = p_i - \mu q_i.$$

Drückt man nun nach (1) in [14] die Perpendikel durch die Coordinaten aus, indem man die bei den Puncten x, y, z auftretenden Proportionalitätsfactoren resp. durch ϱ, ϱ', ϱ'' bezeichnet, so ist

$$p_i = \varrho A_i x_i, \quad q_i = \varrho' A_i y_i, \quad r_i = \varrho'' A_i z_i,$$

und man erhält

$$(1-\mu)\,\varrho'' A_i z_i = \varrho A_i x_i - \mu \varrho' A_i y_i$$

oder

$$\frac{(1-\mu)\varrho''}{\varrho}\, z_i = x_i - \mu \frac{\varrho'}{\varrho}\, y_i$$

und daher

$$z_1 : z_2 : z_3 = x_1 - \mu \frac{\varrho'}{\varrho}\, y_1 : x_2 - \mu \frac{\varrho'}{\varrho}\, y_2 : x_3 - \mu \frac{\varrho'}{\varrho}\, y_3.$$

Es stellt sich mithin wiederum die schon in [18] ermittelte Form für die Coordinaten eines auf der Geraden xy liegenden Punctes z ein. Ausserdem aber ergiebt sich, dass man hat

$$\lambda = -\frac{\varrho'}{\varrho}\,\mu = -\frac{\varrho'}{\varrho} \cdot \frac{xz}{yz},$$

und darin ist zwar $-\frac{\varrho'}{\varrho} = k$ eine willkürliche Grösse, die aber von der Lage des Puncts z ganz unabhängig ist, und welcher daher stets derselbe Werth beigelegt werden kann, so lange die Puncte x und y fest bleiben.

Zusatz. Da sich für jeden Punct z auf der Geraden xy der Werth des Schnittverhältnisses $xz : yz$ angeben lässt, so folgt aus dem Vorigen, dass die Coordinaten jedes Punctes auf dieser Geraden in der Form $z_i = x_i + \lambda y_i$ geschrieben werden können.

§. 2.

20. Bezeichnen a_i und b_i die Coordinaten zweier Puncte a und b, c_i und d_i die Coordinaten zweier anderen Puncte c und d, welche beide auf der Geraden ab liegen, so ist

$$c_i = a_i + \lambda b_i, \quad d_i = a_i + \lambda' b_i.$$

Nach [19] ist dann

$$\lambda = k\frac{ac}{bc}, \quad \lambda' = k\frac{ad}{bd},$$

daraus folgt

$$\lambda : \lambda' = \frac{ac}{bc} : \frac{ad}{bd}.$$

Dieses Verhältniss heisst ein Doppelverhältniss (Doppelschnittverhältniss, *(ratio bissectionalis)* (*Möbius*. Der barycentrische Calcul. Leipzig 1827. pag. 244) der vier Puncte a, b, c, d und wird bezeichnet durch

$$\frac{ac}{bc} : \frac{ad}{bd} = (a\,b\,c\,d).$$

Bei dieser Bezeichnung ist die Ordnung, in welcher die Buchstaben auf einander folgen, von wesentlichem Belange, weil das Doppelverhältniss bei einer anderen Combination der Buchstaben einen anderen Werth erhalten kann. In Beziehung hierauf gelten folgende Sätze:

21. Ein Doppelverhältniss von vier Puncten bleibt ungeändert, wenn man die beiden ersten Elemente mit den beiden letzten vertauscht, ohne die Ordnung jedes Paares zu ändern, d. h.

$$(a\,b\,c\,d) = (c\,d\,a\,b).$$

Denn man hat nach [20]

$$(c\,d\,a\,b) = \frac{ca}{da} : \frac{cb}{db} = \frac{ac}{ad} : \frac{bc}{bd} = \frac{ac}{bc} : \frac{ad}{bd} = (a\,b\,c\,d).$$

22. Vertauscht man in einem Doppelverhältnisse die beiden ersten Elemente mit einander, oder die beiden letzten, so nimmt dasselbe den reciproken Werth an, d. h. es ist

$$(b\,a\,c\,d) = \frac{1}{(a\,b\,c\,d)}, \quad (a\,b\,d\,c) = \frac{1}{(a\,b\,c\,d)}.$$

Beweis. Es ist nach [20]

$$(b\,a\,c\,d) = \frac{bc}{ac} : \frac{bd}{ad} = \frac{1}{\frac{ac}{bc} : \frac{ad}{bd}} = \frac{1}{(a\,b\,c\,d)}.$$

Da man nach [21] die beiden letzten Elemente zu den beiden ersten machen kann, ohne dass das Doppelverhältniss sich ändert, so gilt die bewiesene Eigenschaft auch von den beiden letzten Elementen.

23. Vertauscht man in einem Doppelverhältniss die beiden inneren Elemente mit einander oder die beiden äusseren, so ist die Summe des neuentstehenden Doppelverhältnisses und des ursprünglichen gleich Eins, d. h.

$$(a\,c\,b\,d) + (a\,b\,c\,d) = 1,$$
$$(d\,b\,c\,a) + (a\,b\,c\,d) = 1$$

Beweis. Aus den beiden Identitäten

$$ab + bc = ac \qquad ad = ab + bd$$

folgt durch Multiplication

$$ab \,.\, ad + bc \,.\, ad = ac \,.\, ab + ac \,.\, bd,$$

und hieraus durch Umstellung

$$ab(ad - ac) + bc \,.\, ad - ac \,.\, bd = 0$$

oder

$$ab \,.\, cd + bc \,.\, ad + ca \,.\, bd = 0.$$

Dividirt man nun mit $bc \,.\, ad$, so folgt

$$\frac{ab \,.\, cd}{bc \,.\, ad} + 1 + \frac{ca \,.\, bd}{bc \,.\, ad} = 0,$$

also

$$1 = \frac{ab \,.\, cd}{cb \,.\, ad} + \frac{ac \,.\, bd}{bc \,.\, ad} = \frac{ab}{cb} : \frac{ad}{cd} + \frac{ac}{bc} : \frac{ad}{bd}$$

d. h.

$$(acbd) + (abcd) = 1.$$

Macht man wieder die beiden letzten Elemente zu den beiden ersten [21], so folgt dieselbe Eigenschaft auch für die Vertauschung der beiden äusseren Elemente.

24. Unter den 24 Doppelverhältnissen, welche sich aus den Abschnitten zwischen vier Puncten bilden lassen, sind je vier einander gleich, z. B.

$$(abcd) = (badc) = (cdab) = (dcba);$$

denn man kann zuerst den Satz [22] gleichzeitig auf die beiden ersten und auf die beiden letzten Elemente, und dann auf die ursprüngliche und auf die neue Form den Satz [21] anwenden. (Wendet man auf eine dieser vier Formen den Satz [23] gleichzeitig für die inneren und die äusseren Elemente an, so erhält man keine neue Form.)

Daher giebt es unter den 24 Doppelverhältnissen nur sechs von einander verschiedene; von diesen sind nach [22] drei die reciproken Werthe der drei übrigen, und nach [23] ergänzt sich jedesmal eines mit einem der übrigen zu Eins. Wählt man nun unter den sechs verschiedenen Werthen der Doppelverhältnisse drei solche aus, dass unter diesen keine zwei einander reciprok sind, und auch keine zwei sich zu Eins ergänzen, so heissen diese drei fundamentale Doppelverhältnisse (*Cremona* art. 1). Die drei übrigen sind dann die reciproken Werthe der vorigen und bilden ebenfalls drei fundamentale Doppelverhältnisse. Setzt man z. B. $(abcd) = \mu$, so folgt aus [22] und [23]

$$(abdc) = \frac{1}{\mu} \quad \text{und dann} \quad (adbc) = 1 - \frac{1}{\mu} = \frac{\mu - 1}{\mu}$$

$$(acbd) = 1 - \mu \quad \text{und dann} \quad (acdb) = \frac{1}{1 - \mu} \cdot$$

Demnach sind

$$(abcd) = \mu, \quad (acdb) = \frac{1}{1 - \mu}, \quad (adbc) = \frac{\mu - 1}{\mu}$$

drei fundamentale Doppelverhältnisse, und

$$(abdc) = \frac{1}{\mu}, \quad (acbd) = 1 - \mu, \quad (adcb) = \frac{\mu}{\mu - 1}$$

ebenfalls.

25. Wenn das Doppelverhältniss $(abcd)$ den Werth -1 hat, so sind die Puncte a, b, c, d vier harmonische Puncte, und zwar sind die Elemente von jedem der beiden Paare ab und cd einander in Beziehung auf das andere Paar zugeordnet. Wenn daher zwei Puncte die Coordinaten

$$x_i + \lambda y_i \quad \text{und} \quad x_i - \lambda y_i$$

haben, so sind sie einander in Beziehung auf die Puncte x und y harmonisch zugeordnet, denn das Doppelverhältniss ist dann nach [20] gleich -1. Und umgekehrt.

26. Wenn von drei fundamentalen Doppelverhältnissen zwei einander gleich sind, so hat auch das dritte denselben Werth, welcher dann gleich einer imaginären Cubikwurzel aus — 1 ist. Die drei anderen fundamentalen Doppelverhältnisse sind dann ebenfalls einander gleich, und gleich der zweiten imaginären Cubikwurzel aus — 1. Vier Puncte, deren Doppelverhältnisse diese Eigenschaft besitzen, heissen aequianharmonische Puncte (*Cremona* art. 27.)

Beweis. Wenn von den drei fundamentalen Doppelverhältnissen [24]

$$(a\,b\,c\,d) = \mu, \quad (a\,c\,d\,b) = \frac{1}{1-\mu}, \quad (a\,d\,b\,c) = \frac{\mu-1}{\mu}$$

die beiden ersten einander gleich sind, also $\mu = \frac{1}{1-\mu}$, so ist μ eine Wurzel der Gleichung $\mu^2 - \mu + 1 = 0$, aus welcher $\frac{\mu-1}{\mu} = \mu$ folgt, sodass auch das dritte Doppelverhältniss den Werth μ hat. Nun ist aber

$$\mu^2 - \mu + 1 = \frac{\mu^3+1}{\mu+1},$$

mithin μ eine der beiden imaginären Wurzeln der Gleichung $\mu^3 = -1$, und da das Product dieser beiden Wurzeln gleich $+1$ ist, so ist der reciproke Werth von μ die andere imaginäre Cubikwurzel aus — 1.

27. Bedeuten $x_1\, x_2\, x_3\, x_4$ die Abstände von vier Puncten 1 2 3 4 einer Geraden von einem festen Puncte 0 derselben, und sind diese vier Grössen die Wurzeln einer Gleichung vierten Grades von der Form

$$(1) \qquad a x^4 + 4 b x^3 + 6 c x^2 + 4 d x + e = 0,$$

so ist die Bedingung, dass jene vier Puncte bei irgend einer Zuordnung harmonisch sind, die folgende:

$$a c e + 2 b c d - a d^2 - e b^2 - c^3 = 0.$$

Beweis. Wenn vier Puncte bei irgend einer Zuordnung harmonisch sind, ihr Doppelverhältniss bei dieser Zuordnung also gleich — 1 ist, so ist der reciproke Werth desselben ebenfalls gleich — 1. Daher haben die 24 Doppelverhältnisse nach [24] nur drei von einander verschiedene Werthe, und diese gehören den drei fundamentalen Doppelverhältnissen

$$(2) \qquad (1\,2\,3\,4), \quad (1\,3\,4\,2), \quad (1\,4\,2\,3)$$

an. Hat eines derselben den Werth — 1, so haben die beiden anderen resp. die Werthe $\frac{1}{2}$ und 2, und alle übrigen Doppelverhältnisse erhalten einen dieser drei Werthe. Demnach sind diese drei Anordnungen die einzig möglichen, in denen die vier Puncte auf verschiedene Art einander paarweise harmonisch zugeordnet sein können. Betrachten wir die erste Anordnung, so ist

$$(1\ 2\ 3\ 4) = -1 \quad \text{oder} \quad \frac{13}{23} : \frac{14}{24} = -1$$

und daher

$$13 \cdot 24 + 14 \cdot 23 = 0.$$

Beachtet man nun, dass $\varkappa\lambda = x_\lambda - x_\varkappa$ ist, so schreibt sich diese Gleichung

$$(x_3 - x_1)(x_4 - x_2) + (x_4 - x_1)(x_3 - x_2) = 0$$

oder entwickelt

$$2x_1x_2 - x_1x_3 - x_1x_4 - x_2x_3 - x_2x_4 + 2x_3x_4 = 0.$$

Addirt man zu derselben die aus (1) folgende Gleichung

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = \frac{6c}{a},$$

so erhält man nach Unterdrückung des gemeinschaftlichen Factors 3

$$x_1x_2 + x_3x_4 - \frac{2c}{a} = 0.$$

Diese Gleichung findet bei der Anordnung (1 2 3 4) statt. Da nun der Ausdruck für $\frac{6c}{a}$ in den Wurzeln symmetrisch ist, so erhält man für die beiden anderen Anordnungen (1 3 4 2), (1 4 2 3) durch entsprechende Vertauschung der Indices

$$x_1x_3 + x_4x_2 - \frac{2c}{a} = 0$$

$$x_1x_4 + x_2x_3 - \frac{2c}{a} = 0.$$

Von diesen drei Gleichungen kann immer nur eine Statt finden, weil von den drei Doppelverhältnissen (2) immer nur eines den Werth — 1 haben kann. Man erhält daher die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die vier

Puncte 1 2 3 4 in irgend einer Anordnung harmonisch sind, ausgedrückt durch die Gleichung

$$\left(x_1 x_2 + x_3 x_4 - \frac{2c}{a}\right)\left(x_1 x_3 + x_2 x_4 - \frac{2c}{a}\right)\left(x_1 x_4 + x_2 x_3 - \frac{2c}{a}\right) = 0.$$

In dieser ist der linke Theil symmetrisch in den Wurzeln, und lässt sich daher durch die Coefficienten der Gleichung (1) rational ausdrücken, wenn man die Gleichungen

$$\Sigma x_1 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -\frac{4b}{a}$$

$$\Sigma x_1 x_2 = x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_1 x_4 + x_2 x_3 + x_2 x_4 + x_3 x_4 = \frac{6c}{a}$$

$$\Sigma x_1 x_2 x_3 = x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + x_1 x_3 x_4 + x_2 x_3 x_4 = -\frac{4d}{a}$$

$$x_1 x_2 x_3 x_4 = \frac{e}{a}$$

berücksichtigt. Die Entwicklung giebt zunächst

$$\begin{aligned}
&(x_1 x_2 + x_3 x_4)(x_1 x_3 + x_2 x_4)(x_1 x_4 + x_2 x_3) \\
&- \frac{2c}{a}\left[(x_1 x_2 + x_3 x_4)(x_1 x_3 + x_2 x_4) + (x_1 x_2 + x_3 x_4)(x_1 x_4 + x_2 x_3)\right. \\
&\qquad \left. + (x_1 x_3 + x_2 x_4)(x_1 x_4 + x_2 x_3)\right] \\
&+ \frac{4c^2}{a^2}(x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_1 x_4 + x_2 x_3 + x_2 x_4 + x_3 x_4) - \frac{8c^3}{a^3} = 0,
\end{aligned}$$

wofür wir abgekürzt schreiben

$$(3) \qquad P - \frac{2c}{a} Q + \frac{4c^2}{a^2} \cdot \frac{6c}{a} - \frac{8c^3}{a^3} = 0.$$

Nun ergiebt sich

$$P = \Sigma x_1^3 x_2 x_3 x_4 + \Sigma x_1^2 x_2^2 x_3^2,$$

und es ist

$$\Sigma x_1^3 x_2 x_3 x_4 = x_1 x_2 x_3 x_4 (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)$$

$$= \frac{e}{a}\left(\frac{16 b^2}{a^2} - 2 \cdot \frac{6c}{a}\right) = \frac{16 eb^2}{a^3} - \frac{12 ec}{a^2}$$

$$\Sigma x_1^2 x_2^2 x_3^2 = \frac{16 d^2}{a^2} - 2 x_1 x_2 x_3 x_4 \, \Sigma x_1 x_2$$

$$= \frac{16 d^2}{a^2} - 2 \frac{e}{a} \cdot \frac{6c}{a} = \frac{16 d^2}{a^2} - \frac{12 ce}{a^2}$$

also

$$P = 16 \frac{b^2 e}{a^3} - 24 \frac{ce}{a^2} + 16 \frac{d^2}{a^2}.$$

Ferner

$$Q = \Sigma x_1^2 x_2 x_3 = x_1 x_2 x_3 (x_1 + x_2 + x_3) + x_1 x_2 x_4 (x_1 + x_2 + x_4)$$
$$+ x_1 x_3 x_4 (x_1 + x_3 + x_4) + x_2 x_3 x_4 (x_2 + x_3 + x_4)$$
$$= - \left[x_1 x_2 x_3 \left(\frac{4b}{a} + x_4 \right) + x_1 x_2 x_4 \left(\frac{4b}{a} + x_3 \right) \right.$$
$$\left. + x_1 x_3 x_4 \left(\frac{4b}{a} + x_2 \right) + x_2 x_3 x_4 \left(\frac{4b}{a} + x_1 \right) \right]$$
$$= - \left[- \frac{4b}{a} \cdot \frac{4d}{a} + \frac{4e}{a} \right] = \frac{16bd}{a^2} - \frac{4e}{a}.$$

Nach Substitution der Ausdrücke für P und Q in (3) erhält man daher

$$\frac{16 . b^2 e}{a^3} - 24 \frac{ec}{a^2} + 16 \frac{d^2}{a^2} - \frac{2c}{a} \left(16 \frac{bd}{a^2} - \frac{4e}{a} \right) + 16 \frac{c^3}{a^3} = 0$$

und dann nach Multiplication mit a^3 und gehöriger Reduction

$$b^2 e - aec + ad^2 - 2bcd + c^3 = 0,$$

welches mit umgekehrtem Zeichen die obige Bedingung ist. (*Cremona* art. 6. *Salmon*. Lessons introductory to the modern higher algebra. pag. 100.)

28. Die nothwendige und hinreichende Bedingung, welche zwischen den Coefficienten der Gleichung (1) in [27] stattfindet, wenn die Wurzeln der letzteren vier aequianharmonischen Puncten angehören, ist

$$ae - 4bd + 3c^2 = 0.$$

Beweis. Nach [26] sind die vier Puncte 12 34 aequianharmonisch, wenn

$$(1\,2\,3\,4) = (1\,3\,4\,2)$$

d. h.

$$\frac{13}{23} : \frac{14}{24} = \frac{14}{34} : \frac{12}{32}$$

ist. Durch die Wurzeln ausgedrückt erhält man hieraus

$$\frac{(x_3 - x_1)(x_4 - x_2)}{(x_3 - x_2)(x_4 - x_1)} - \frac{(x_4 - x_1)(x_2 - x_3)}{(x_4 - x_3)(x_2 - x_1)} = 0$$

oder

$$(x_3 - x_1)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3)(x_2 - x_1) + (x_2 - x_3)^2 (x_4 - x_1)^2 = 0.$$

Diese Gleichung erweist sich als symmetrisch in Beziehung auf die Wurzeln, denn sie giebt entwickelt

$$(1) \quad - \Sigma x_1^2 x_2 x_3 + \Sigma x_1^2 x_2^2 + 6 . x_1 x_2 x_3 x_4 = 0.$$

Nun ist

$$\Sigma x_1^2 x_2 x_3 = (\Sigma x_1 x_2 x_3)(\Sigma x_1) - 4 x_1 x_2 x_3 x_4 = 16 \frac{b\,d}{a^2} - 4 \frac{e}{a}$$

$$\begin{aligned}\Sigma x_1^2 x_2^2 &= (\Sigma x_1 x_2)^2 - 2[\Sigma x_1^2 x_2 x_3 + 3 x_1 x_2 x_3 x_4] \\ &= (\Sigma x_1 x_2)^2 - 2(\Sigma x_1 x_2 x_3)(\Sigma x_1) + 2 x_1 x_2 x_3 x_4 \\ &= 36 \frac{c^2}{a^2} - 32 \frac{b\,d}{a^2} + 2 \frac{e}{a}.\end{aligned}$$

Substituirt man diese Werthe in (1), so erhält man

$$-16 \frac{b\,d}{a^2} + 4 \frac{e}{a} + 36 \frac{c^2}{a^2} - 32 \frac{b\,d}{a^2} + 2 \frac{e}{a} + 6 \frac{e}{a} = 0,$$

oder reducirt

$$ae - 4bd + 3c^2 = 0.$$

(*Painvin*. Equation des rapports anharmoniques (Nouv. Ann. de Math. Bd. 19. pag. 412.) *Cremona* art. 27.)

§. 3.

29. Alle Puncte einer Geraden bilden eine Punctreihe; die Gerade selbst heisst der Träger der Punctreihe. Sind x, y zwei Puncte derselben, so können die Coordinaten aller Puncte der Reihe nach [19] durch $x_i + \lambda y_i$ ausgedrückt werden, wenn man dem λ nach und nach alle Werthe zuertheilt.

30. Sind $x_i + \lambda_1 y_i$, $x_i + \lambda_2 y_i$, $x_i + \lambda_3 y_i$, $x_i + \lambda_4 y_i$ die Coordinaten von irgend vier Puncten a, b, c, d einer Reihe, so ist das Doppelverhältniss

$$(a\,b\,c\,d) = \frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_2 - \lambda_3} : \frac{\lambda_1 - \lambda_4}{\lambda_2 - \lambda_4}.$$

Beweis. Legt man die Puncte a, b als die den Träger bestimmenden zu Grunde, so können die Coordinaten jedes Punctes der Reihe in der Form

$$x_i + \lambda_1 y_i + \mu(x_i + \lambda_2 y_i)$$

geschrieben werden; diese lässt sich umformen in

$$(1 + \mu)\left(x_i + \frac{\lambda_1 + \mu\lambda_2}{1 + \mu} y_i\right),$$

und da es nur auf die Verhältnisse der Coordinaten ankommt, so kann der gemeinschaftliche Factor $(1 + \mu)$ unberücksichtigt bleiben. Man erhält daher den Punct c, wenn man setzt

(1) $$\frac{\lambda_1 + \mu\lambda_2}{1 + \mu} = \lambda_3.$$

Ebenso kann man die Coordinaten des Punctes d in der Form

$$x_i + \lambda_1 y_i + \mu'(x_i + \lambda_2 y_i)$$

schreiben und erhält diesen Punct, wenn

(2) $$\frac{\lambda_1 + \mu'\lambda_2}{1 + \mu'} = \lambda_4$$

ist. Nun ist nach [20] das Doppelverhältniss $(a\,b\,c\,d)$ gleich $\mu : \mu'$, aber aus (1) und (2) ergiebt sich

$$\mu = -\frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_2 - \lambda_3}, \qquad \mu' = -\frac{\lambda_1 - \lambda_4}{\lambda_2 - \lambda_4}$$

und hieraus

$$\frac{\mu}{\mu'} = \frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_2 - \lambda_3} : \frac{\lambda_1 - \lambda_4}{\lambda_2 - \lambda_4}.$$

31. Sind die vorigen Puncte vier harmonische Puncte, und zwar $a\,b$ und $c\,d$ einander resp. zugeordnet, so ist

$$\lambda_1\lambda_2 - \tfrac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_3 + \lambda_4) + \lambda_3\lambda_4 = 0.$$

Denn in diesem Falle ist [25]

$$\frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_2 - \lambda_3} : \frac{\lambda_1 - \lambda_4}{\lambda_2 - \lambda_4} = -1,$$

was entwickelt die obige Gleichung giebt. (*Hesse.* Vorles. aus der anal. Geom. der geraden Linie etc. pag. 53.)

32. Bezeichnet man nach [29] mit $x_i + \lambda y_i$ die Coordinaten der Puncte einer Punctreihe auf dem Träger xy und mit $x_i' + \lambda y_i'$ die Coordinaten der Puncte einer zweiten Punctreihe auf dem Träger $x'y'$, so sollen je zwei solche Puncte der beiden Reihen, welche gleichen Werthe von λ angehören, einander projectivisch entsprechend, und überhaupt die beiden Punctreihen in Ansehung der einander so entsprechenden Puncte projectivisch genannt werden.

33. Bei zwei projectivischen Punctreihen ist das Doppelverhältniss von vier Puncten a, b, c, d der einen Reihe gleich dem Doppelverhältniss der vier entsprechenden Puncte a', b', c', d' der anderen Reihe.

Beweis. Das Doppelverhältniss der Puncte a, b, c, d hängt [30] nur von den Werthen von λ ab, welche diesen vier Puncten angehören. Den vier entsprechenden Puncten

a', b', c', d' gehören aber [32] die gleichen Werthe von λ an, daher haben diese letzteren Puncte das nämliche Doppelverhältniss, wie die ersteren.

34. Wenn das Doppelverhältniss $(a\,b\,c\,d)$ von vier Puncten einer Geraden dem Doppelverhältniss $(a'\,b'\,c'\,d')$ von vier ebenfalls in gerader Linie liegenden Puncten gleich ist, so entsprechen die Puncte einander der Reihe nach projectivisch.

Beweis. Seien

$$x_i, \; y_i, \quad x_i + \lambda y_i, \quad x_i + \mu y_i$$

die Coordinaten der Puncte a, b, c, d,

$$x_i' \; y_i', \quad x_i' + \lambda' y_i', \quad x_i' + \mu' y_i'$$

die der Puncte a', b', c', d', so ist [20] der Voraussetzung nach

$$\frac{\lambda'}{\mu'} = \frac{\lambda}{\mu}$$

oder mit Anwendung eines Proportionalitätsfactors ϱ

$$\lambda' = \varrho \lambda \qquad \mu' = \varrho \mu;$$

daher kann man die Coordinaten der Puncte a', b', c', d' auch schreiben

$$x_i', \quad y_i', \quad x_i' + \varrho \lambda y_i', \quad x_i' + \varrho \mu y_i'$$

oder

$$x_i', \quad y_i', \quad \varrho\left(\frac{x_i'}{\varrho} + \lambda y_i'\right); \quad \varrho\left(\frac{x_i'}{\varrho} + \mu y_i'\right).$$

Nun kommen aber lediglich die Verhältnisse der Coordinaten in Betracht, daher kann man statt der vorigen auch setzen

$$\frac{x_i'}{\varrho}, \quad y_i', \quad \frac{x_i'}{\varrho} + \lambda y_i', \quad \frac{x_i'}{\varrho} + \mu y_i',$$

mithin entsprechen diese vier Puncte den Puncten $a\;b\;c\;d$ der Reihe nach projectivisch [32].

35. Zwei projectivische Punctreihen sind vollständig bestimmt, sobald drei Paare entsprechender Puncte $a a', b b', c c'$ gegeben oder willkürlich angenommen sind. — Denn in Folge der Gleichheit der Doppelverhältnisse

$$(a\;b\;c\;d) = (a'\;b'\;c'\;d')$$

ist zu jedem Puncte d der entsprechende d' eindeutig bestimmt.

36. Diejenigen zwei Puncte r und q' zweier projectivischer Punctreihen, von denen jeder dem unendlich fernen Puncte der anderen Reihe entspricht, heissen die Gegenpuncte der beiden Reihen.

Das Product der Abstände je zweier entsprechender Puncte a, a' von ihren Gegenpuncten ist constant d. h.

$$ar \,.\, a'q' = \text{Const.}$$

Beweis. Sind a, b, c, d irgend vier Puncte der einen Reihe, a', b', c', d' die ihnen entsprechenden der zweiten Reihe, so ist [33]

$$(a\,b\,c\,d) = (a'\,b'\,c'\,d')$$

oder [20]

$$\frac{a\,c}{b\,c} : \frac{a\,d}{b\,d} = \frac{a'c'}{b'c'} : \frac{a'd'}{b'd'}.$$

Setzt man nun

$$c = r \qquad d = \infty$$

und daher

$$c' = \infty \qquad d' = q',$$

so haben die Verhältnisse $\frac{a\,d}{b\,d}$ und $\frac{a'c'}{b'c'}$ beide den Grenzwerth Eins, und daher ist

$$\frac{a\,r}{b\,r} : 1 = 1 : \frac{a'q'}{b'q'},$$

also

$$a\,r \,.\, a'q' = br \,.\, b'q';$$

daher bleibt der Werth dieses Products ungeändert, wenn an Stelle von $a\,a'$ ein anderes Paar $b\,b'$ entsprechender Puncte tritt.

37. Entsprechen die Puncte zweier Reihen einander der Art, dass das Product ihrer Abstände von zwei festen Puncten r und q' constant ist, so sind die Punctreihen projectivisch, und r, q' sind die Gegenpuncte der beiden Reihen.

Beweis. Bezeichnet man mit α die Constante, und sind aa', bb', cc', dd' vier Paare entsprechender Puncte, so ist der Annahme nach

$$ar \,.\, a'q' = br \,.\, b'q' = cr \,.\, c'q' = dr \,.\, d'q' = \alpha,$$

mithin

$$a'q' = \frac{\alpha}{a\,r}, \quad b'q' = \frac{\alpha}{b\,r}, \quad c'q' = \frac{\alpha}{c\,r}, \quad d'q' = \frac{\alpha}{d\,r}.$$

Da nun $a'q' - c'q' = a'c'$, etc. ist, so folgt

$$a'c' = \frac{\alpha(cr - ar)}{ar\,.\,cr} = -\frac{\alpha\,.\,ac}{ar\,.\,cr},\quad b'c' = -\frac{\alpha\ bc}{br\,.\,cr}$$

$$a'd' = -\frac{\alpha\,.\,ad}{ar\,.\,dr},\quad b'd' = -\frac{\alpha\,.\,bd}{br\,.\,dr},$$

und daher

$$\frac{a'c'}{b'c'} : \frac{a'd'}{b'd'} = \frac{ac}{bc} : \frac{ad}{bd};$$

das Entsprechen der Puncte ist also nach [34] ein projectivisches. Lässt man in der Gleichung $ar\,.\,a'q' = \alpha$ den Punct a mit r zusammenfallen, so wird die Distanz ar gleich Null, folglich muss a' in's Unendliche rücken, d. h. r ist der Gegenpunct der einen Reihe, und ebenso q' der der anderen Reihe. (*Cremona* art. 8.)

38. Wenn zwei projectivische Punctreihen auf der nämlichen Geraden liegen, (aufeinanderliegende projectivische Punctreihen sind) so giebt es stets zwei und nur zwei (reelle oder imaginäre) Puncte, die mit ihren entsprechenden zusammenfallen und Doppelpuncte genannt werden. Die Mitte derselben ist stets reell und fällt mit der Mitte der Gegenpuncte zusammen.

Beweis. Sind aa' zwei entsprechende, r, q' die Gegenpuncte, und bedeutet α eine Constante, so ist [36]

$$ar\,.\,a'q' = \alpha.$$

Nimmt man nun auf dem gemeinschaftlichen Träger irgend einen festen Punct o als Anfangspunct von Strecken an, und bezeichnet die in o beginnenden und in den Puncten a, r, etc. endenden Strecke oa, or, etc. mit den Buchstaben a, r, etc., so kann man die vorige Gleichung schreiben

$$(r - a)\,(q' - a') = \alpha.$$

Bedeutet nun x einen Punct, der mit dem ihm entsprechenden zusammenfällt, so muss die Strecke x der Gleichung

$$(r - x)\,(q' - x) = \alpha$$

genügen. Diese, welche sich auch schreiben lässt,

$$(1)\qquad x^2 - (r + q')x + rq' - \alpha = 0,$$

hat stets zwei reelle oder imaginäre Wurzeln, welche die Doppelpuncte liefern. Nennt man diese Wurzeln e und f, so folgt ferner

$$\frac{e+f}{2} = \frac{r+q'}{2}$$

d. h. die Mitte der Doppelpuncte ist immer reell und fällt mit der Mitte der Gegenpuncte zusammen. Wenn die Wurzeln der Gleichung (1) imaginär ausfallen, so sind zwar die Doppelpuncte auf dem Träger der Punctreihen nicht mehr angebbar; da sich aber für die von ihnen begrenzten Strecken auch in diesem Falle vollkommen bestimmte, wenn auch imaginäre, algebraische Ausdrücke ergeben, so betrachtet man die Doppelpuncte dann auch als vorhanden und nennt sie imaginär*).

39. Bei zwei aufeinander liegenden projectivischen Punctreihen hat das von irgend zwei entsprechenden Puncten mit den beiden Doppelpuncten gebildete Doppelverhältniss einen constanten Werth.

Beweis. Sind e, f die Doppelpuncte, aa', bb' zwei Paare entsprechender Puncte, so ist, da jeder Doppelpunct sich selbst entspricht, nach [33]

$$(a\,b\,e\,f) = (a'\,b'\,e\,f)$$

oder [20]

$$\frac{ae}{be} : \frac{af}{bf} = \frac{a'e}{b'e} : \frac{a'f}{b'f}$$

Hieraus aber folgt

$$\frac{ae}{a'e} : \frac{af}{a'f} = \frac{be}{b'e} : \frac{bf}{b'f}$$

oder [20]

$$(a\,a'\,e\,f) = (b\,b'\,e\,f);$$

d. h. das Doppelverhältniss ändert seinen Werth nicht, wenn an Stelle von $a\,a'$ ein anderes Paar entsprechender Puncte bb' tritt.

---

*) Man kann die imaginären Doppelpuncte zweier auf einander liegender projectivischer Punctreihen stets reell angeben, wenn man die Punctreihen als einen speciellen Fall zweier kreisverwandter Punctsysteme betrachtet. Allerdings liegen die Doppelpuncte dann nicht auf dem Träger der Punctreihen und erscheinen, wenn man sie da sucht, wo sie nicht liegen, als imaginär.

§. 4.

40. Wenn bei zwei auf einander liegenden projectivischen Punctreihen das constante Doppelverhältniss zwischen zwei entsprechenden Puncten und den beiden Doppelpuncten den Werth — 1 hat, d. h. [25] wenn irgend zwei entsprechende Puncte, und daher [39] alle entsprechenden Punctepaare die Strecke zwischen den Doppelpuncten harmonisch theilen, so heissen die beiden Punctreihen eine (quadratische) Involution, und die entsprechenden Puncte heissen conjugirte Puncte der Involution.

41. Wenn bei zwei aufeinander liegenden projectivischen Punctreihen ein Punct a der ersten Reihe einem Puncte a' der zweiten Reihe, und gleichzeitig dem Puncte a' der ersten Reihe der Punct a der zweiten Reihe entspricht, so heisst das gegenseitige Entsprechen der beiden Puncte a, a' ein involutorisches.

Bei einer Involution von Puncten entsprechen alle conjugirten Puncte einander involutorisch.

Beweis. Sind $a\, a'$ irgend zwei conjugirte Puncte, e, f die Doppelpuncte, so ist [40]

$$(a\, a'\, e\, f) = -1.$$

Nach [22] aber ist

$$(a\, a'\, e\, f) = \frac{1}{(a'\, a\, e\, f)}$$

und daher auch

$$(a'\, a\, e\, f) = -1,$$

folglich ist

$$(a\, a'\, e\, f) = (a'\, a\, e\, f)$$

d. h. [34] entspricht a' dem a, so entspricht auch a dem a'.

42. Wenn bei zwei aufeinander liegenden projectivischen Punctreihen die Puncte eines Paares einander involutorisch entsprechen, so bilden die Punctreihen eine Involution und daher [41] entsprechen sich alle Punctepaare involutorisch.

Beweis. Ist

$$(a\, a'\, e\, f) = (a'\, a\, e\, f),$$

so ist, weil [22]

$$(a'aef) = \frac{1}{(aa'ef)}$$

ist,

$$(aa'ef)^2 = 1,$$

und da das Doppelverhältniss aus vier von einander verschiedenen Puncten niemals den Werth $+1$ haben kann, so ist

$$(aa'ef) = -1,$$

und daher [40] bilden die Punctreihen eine Involution.

43. Durch zwei conjugirte Punctepaare aa', bb', die man auf einer Geraden willkürlich annehmen kann, ist eine Involution bestimmt.

Beweis. Zwei projectivische Punctreihen sind durch drei Paare entsprechender Puncte bestimmt [35]. Nun hat man hier von der einen Punctreihe vier Puncte a, a', b, b' und von der anderen die resp. entsprechenden a', a, b', b. Die Punctreihen sind also jedenfalls bestimmt; sie sind aber auch nicht überbestimmt, denn nimmt man zuerst nur a, a', b und ihnen entsprechend a', a, b' an, so hat man ein involutorisches Paar aa', und daher muss [42] auch das zweite bb' ein involutorisches sein, d. h. es muss auch b dem b' entsprechen.

44. Es giebt immer ein und nur ein (reelles oder imaginäres) Punctepaar e, f, welches gleichzeitig zwei auf einer Geraden gegebene Punctepaare aa' und bb' harmonisch trennt; und zwar sind e, f die Doppelpuncte der durch aa' und bb' bestimmten Involution.

Beweis. Die Doppelpuncte e, f der durch aa', bb' nach [43] bestimmten Involution haben die genannte Eigenschaft [40]. Bezeichnet man nun die Coordinaten der Puncte a, a'; b, b' durch

$$x_i + \lambda y_i, \quad x_i + \lambda' y_i; \quad x_i + \mu y_i, \quad x_i + \mu' y_i$$

und die der gesuchten Puncte e, f durch

$$x_i + \nu y_i, \quad x_i + \nu' y_i,$$

so müssen, wenn das letztere Paar jedes der beiden ersteren harmonisch trennen soll, nach [31] die Gleichungen

$$\nu\nu' - \tfrac{1}{2}(\nu + \nu')(\lambda + \lambda') + \lambda\lambda' = 0$$
$$\nu\nu' - \tfrac{1}{2}(\nu + \nu')(\mu + \mu') + \mu\mu' = 0$$

erfüllt werden. Aus diesen können $\nu\nu'$ und $\nu + \nu'$ eindeutig

bestimmt werden, und daher sind ν und ν' selbst die Wurzeln einer quadratischen Gleichung. Demnach giebt es nur ein Werthepaar für ν und ν', welches den vorigen Gleichungen genügt. (*Hesse.* Vorl. aus der anal. Geom. der geraden Linie, etc. pag. 54.)

45. Wenn von drei Punctepaaren aa', bb', cc' auf einer Geraden jedes die nämlichen zwei Puncte e, f harmonisch trennt, so sind jene drei Punctepaare conjugirte Paare einer und derselben Involution, und e, f die Doppelpuncte der letzteren. — Denn e, f sind nach [44] die Doppelpuncte der durch aa', bb' bestimmten Involution, und da cc' ebenfalls einander harmonisch zugeordnet sind in Bezug auf e, f, so gehören sie nach [40] derselben Involution an.

46. Die nothwendige und hinreichende Bedingung, dass drei Punctepaare aa', bb', cc' eine Involution bilden, kann durch jede der folgenden vier Gleichungen ausgedrückt werden:

$$ab' \,.\, bc' \,.\, ca' = ac' \,.\, ba' \,.\, cb'$$
$$ab' \,.\, bc \,.\, c'a' = ac \,.\, ba' \,.\, c'b'$$
$$bc' \,.\, ca \,.\, a'b' = ba \,.\, cb' \,.\, a'c'$$
$$ca' \,.\, ab \,.\, b'c' = cb \,.\, ac' \,.\, b'a'.$$

Beweis. Wählt man unter den vorliegenden sechs Puncten zwei conjugirte und zwei nicht conjugirte aus, z. B. $a\, b\, a'\, c'$, so entsprechen diesen der Reihe nach projectivisch die folgenden $a'\, b'\, a\, c$. Es ist also

$$(1) \qquad (a\, b\, a'\, c') = (a'\, b'\, a\, c).$$

d. i. [20]

$$\frac{aa'}{ba'} : \frac{ac'}{bc'} = \frac{a'a}{b'a} : \frac{a'c}{b'c}$$

oder

$$\frac{aa' \,.\, bc'}{ba' \,.\, ac'} = \frac{a'a \,.\, b'c}{b'a \,.\, a'c}.$$

Hebt man darin die auf beiden Seiten vorkommende Strecke aa' fort, so ergiebt sich

$$\frac{bc'}{ba' \,.\, ac'} = -\frac{b'c}{b'a \,.\, a'c} = \frac{cb'}{ab' \,.\, ca'}$$

oder

$$(2) \qquad ab' \,.\, bc' \,.\, ca' = ac' \,.\, ba' \,.\, cb',$$

welches die erste der obigen Gleichungen ist. Aus dieser

folgen die drei übrigen, wenn man nach der Reihe die Puncte der Paare cc', aa', bb' unter einander vertauscht. (*Schröter.* Steiner's Vorlesungen pag. 56.) Findet umgekehrt die Gleichung (2) statt, so folgt aus ihr rückwärts die Gleichung (1), welche zeigt, dass die Puncte des Paares aa' einander involutorisch entsprechen, sodass das nämliche nach [42] auch von den Paaren bb' und cc' gelten muss.

§. 5.

47. Bedeutet x den Abstand eines veränderlichen Punctes einer Geraden von einem beliebigen festen Puncte derselben, und besteht die Gleichung

$$(1) \quad a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n + \lambda(b_0x^n + b_1x^{n-1} + \ldots + b_n) = 0,$$

worin die a und b gegebene, λ aber einen veränderlichen Zahlencoefficienten bedeutet, so entsprechen jedem Puncte x $(n-1)$ andere Puncte der Geraden. Denn setzt man den einem angenommenen Puncte zugehörigen Werth von x in die Gleichung (1), so liefert diese zunächst den zugehörigen Werth von λ und besitzt dann n Wurzeln, von denen eine die angenommene x ist. Man kann auch sagen, dass jedem Werthe von λ vermöge der Gleichung (1) eine Gruppe von n Puncten zugehört, entsprechend den n Wurzeln der Gleichung (1). Das System solcher Punctgruppen, welches entsteht, wenn man λ andere und andere Werthe zuertheilt, heisst eine Involution n^{ten} Grades (*Cremona* art. 21. *Jonquières* Généralisation de la théorie de l'involution. Annali di Matematica II. pag. 86). Fallen in einer Gruppe zwei Puncte in einen zusammen, so heisst ein solcher Punct ein Doppelpunct der Involution.

48. Ist $n = 1$, sodass die Gleichung (1) in [47] in folgende

$$(1) \qquad a_0x + a_1 + \lambda(b_0x + b_1) = 0$$

übergeht, so besteht jede Punctgruppe nur aus einem Puncte; eine Involution ersten Grades bildet also eine einfache Punctreihe. Hat man nun eine zweite Punctreihe, bestimmt durch die Gleichung

$$a_0'x' + a_1' + \lambda(b'_0x' + b_1') = 0,$$

so sind diejenigen Puncte beider Reihen, welche gleichen Werthen von λ angehören, einander projectivisch entsprechend.

Beweis. Bezeichnet man die Werthe von x (und auch die entsprechenden Puncte), welche zu $\lambda = 0$ und $\lambda = \infty$ gehören, resp. mit ξ und η, so ist

$$\xi = -\frac{a_1}{a_0} \quad \eta = -\frac{b_1}{b_0},$$

und führt man diese in die Gleichung (1) ein, so ergiebt sich

$$\lambda = -\frac{a_0}{b_0} \cdot \frac{x-\xi}{x-\eta};$$

die Grösse λ ist also proportional dem Schnittverhältniss, welches der veränderliche Punct x mit den festen Puncten ξ und η bestimmt. Bildet man nun das Doppelverhältniss von vier Puncten der einen Reihe und das von solchen vier Puncten der zweiten Reihe, welche gleichen Werthen von λ angehören, so haben diese beiden Doppelverhältnisse gleichen Werth und folglich [34] sind die beiden Punctreihen projectivisch.

49. Eine Involution zweiten Grades ($n=2$) ist identisch mit der in [40] ff. betrachteten Involution.

Beweis. In diesem Falle besteht jede Punctgruppe aus zwei Puncten, angehörig den Wurzeln der Gleichung

$$(1) \qquad a_0 x^2 + a_1 x + a_2 + \lambda(b_0 x^2 + b_1 x + b_2) = 0.$$

Nimmt man aus jeder Punctgruppe nur einen Punct, so erhält man eine Punctreihe; und daher können die sämmtlichen Gruppen als zwei auf demselben Träger befindliche Punctreihen angesehen werden, in welchen je zwei Puncte entsprechende oder conjugirte sind, die derselben Gruppe angehören. Wenn man nun zeigen kann, dass dieses Entsprechen der Puncte der beiden Reihen ein projectivisches ist, so ist es wegen ihrer Entstehung aus der quadratischen Gleichung auch immer ein involutorisches [41], und daher bilden dann die Punctreihen eine Involution im früheren Sinne [42]. Bezeichnet man, um diesen Nachweis zu liefern, die Wurzeln der Gleichung (1) mit x_1 und x_2, so ist zuerst

$$(2) \qquad x_1 x_2 = \frac{a_2 + \lambda b_2}{a_0 + \lambda b_0}.$$

Für diejenige Gruppe aber, welcher der Nullpunct angehört, ist

$$a_2 + \lambda b_2 = 0 \quad \text{oder} \quad \lambda = -\frac{a_2}{b_2},$$

und der dem Nullpuncte conjugirte Punct ist dann bestimmt durch

$$x = -\frac{a_1 + \lambda b_1}{a_0 + \lambda b_0} = -\frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{a_0 b_2 - a_2 b_0}.$$

Wählt man jetzt den Nullpunct so, dass der ihm conjugirte Punct im Unendlichen liegt, so muss

$$a_0 b_2 - a_2 b_0 = 0,$$

oder, wenn ϱ einen willkürlichen Proportionalitätsfactor bedeutet,

$$b_2 = \varrho a_2 \qquad b_0 = \varrho a_0$$

sein. Substituirt man diese Werthe in (2), so folgt

$$x_1 x_2 = \frac{a_2(1 + \lambda \varrho)}{a_0(1 + \lambda \varrho)} = \frac{a_2}{a_0},$$

d. h. das Product der Abstände zweier conjugirter Puncte von dem neuen Nullpuncte ist unabhängig von λ und für alle Punctepaare constant. Demnach [37] sind die in Rede stehenden Punctreihen in der That projectivisch, und der neue Nullpunct ist der gemeinschaftliche Gegenpunct beider Reihen. Dass der letztere beiden gemeinschaftlich ist, bestätigt, dass der Gegenpunct und der unendlich ferne Punct einander involutorisch entsprechen. (*Cremona.* art. 25.)

50. Wenn in der Gleichung (1) in [47] $n = 3$ ist, so erhält man eine cubische Involution vermöge der Gleichung

$$(1) \quad a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3 + \lambda (b_0 x^3 + b_1 x^2 + b_2 x + b_3) = 0.$$

Jede Gruppe besteht hier aus drei Puncten. In einer cubischen Involution giebt es vier Doppelpuncte, d. h. unter den Punctgruppen, welche eine cubische Involution bilden, giebt es vier, welche zwei zusammenfallende Puncte enthalten.

Beweis. Ein Doppelpunct entsteht dann und nur dann, wenn die Grösse λ einen solchen Werth hat, dass die Gleichung (1) zwei gleiche Wurzeln besitzt. Nun ist aber die Bedingung, dass eine cubische Gleichung zwei gleiche Wurzeln hat, nach [9] eine Gleichung, welche die Coefficienten der cubischen Gleichung in der vierten Dimension enthält. In Beziehung

auf λ wird daher diese Bedingung eine Gleichung vom vierten Grade. Die vier Wurzeln derselben sind die Werthe von λ, deren zugehörige Punctgruppen Doppelpuncte enthalten. (*Cremona.* art. 22.)

51. Ist eine cubische Involution der Art, dass von jeder Gruppe ein Punct in einen festen Punct o hineinfällt, so fallen in diesen auch zwei Doppelpuncte hinein, und es giebt ausserdem nur noch zwei andere Doppelpuncte.

Beweis. Nimmt man den Punct o als denjenigen, von welchem aus die Abstände x gerechnet werden, so muss im vorliegenden Falle die Gleichung (1) in [50] für jeden Werth von λ eine Wurzel $x = 0$ haben; daher muss $a_3 = 0$, $b_3 = 0$ sein, und die Gleichung die Form haben

$$(1)\quad x[a_0 x^2 + a_1 x + a_2 + \lambda(b_0 x^2 + b_1 x + b_2)] = 0.$$

Bestimmt man nun wieder nach [9] die Bedingung, dass diese cubische Gleichung zwei gleiche Wurzeln hat, so hat man in [9] $d = 0$ zu setzen, und dadurch reducirt sich die dortige Gleichung auf

$$c^2(b^2 - 4ac) = 0.$$

Das giebt auf die vorliegende Gleichung (1) übertragen

$$(2)\quad (a_2 + \lambda b_2)^2 [(a_1 + \lambda b_1)^2 - 4(a_0 + \lambda b_0)(a_2 + \lambda b_2)] = 0.$$

Diese Gleichung hat zwei gleiche Wurzeln λ, für welche $a_2 + \lambda b_2 = 0$ ist, und für welche die Gleichung (1) im linken Theile den Factor x^2 erhält, so dass zwei Doppelpuncte in $x = 0$, d. h. in o hineinfallen.

52. Ist eine cubische Involution von der Art, dass nicht allein von jeder Gruppe ein Punct in o hineinfällt, sondern dass ausserdem eine der Gruppen aus drei in o zusammenfallenden Puncten besteht, so fallen drei Doppelpuncte in o hinein, und es existirt ausserdem nur noch ein anderer Doppelpunct.

Beweis. In diesem Falle muss es einen Werth von λ geben, für welchen in (1) [51] gleichzeitig

$$a_1 + \lambda b_1 = 0 \qquad \text{und} \qquad a_2 + \lambda b_2 = 0,$$

ist, so dass dann

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2},$$

oder wenn ϱ einen willkürlichen Proportionalitätsfactor bedeutet,

$$a_1 = \varrho a_2 \qquad b_1 = \varrho b_2$$

sein muss. Dadurch reducirt sich die Gleichung (2) in [51] auf

$$(a_2 + \lambda b_2)^3 \left[\varrho^2 (a_2 + \lambda b_2) - 4(a_0 + \lambda b_0)\right] = 0,$$

welche drei gleiche Wurzeln λ hat, für die $a_2 + \lambda b_2 = 0$ ist, und denen der Punct o als Doppelpunct angehört.

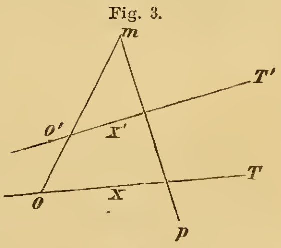
53. Gerade so wie sich in [48] ergeben hat, dass in zwei Involutionen ersten Grades, d. h. zwei Punctreihen, solche Puncte einander projectivisch entsprechen, welche gleichen Werthen von λ angehören, so sollen auch in zwei Involutionen beliebigen Grades, welche von den Gleichungen

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n + \lambda (b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots + b_n) = 0$$
$$a_0' x^m + a_1' x^{m-1} + \ldots + a'_m + \lambda (b_0' x^m + b_1' x^{m-1} + \ldots + b'_m) = 0$$

abhängen, je zwei Punctgruppen, welche gleichen Werthen von λ zugehören, einander projectivisch entsprechend genannt werden.

54. Legt man von einem beliebigen Mittelpuncte m aus Strahlen durch die Puncte einer Involution beliebigen Grades auf einer Geraden T, so bilden die Durchschnitte dieser Strahlen mit einer beliebigen anderen Geraden T' eine Involution desselben Grades, welche mit der vorigen projectivisch ist.

Beweis. (Fig. 3.) Man nehme T als Abscissenaxe in einem Parallelcoordinatensystem, und als Ordinatenaxe die Gerade, welche den Anfangspunct o der Strecken x mit dem Mittelpuncte m der Strahlen verbindet. Ebenso sei T' die Abscissenaxe in einem zweiten Parallel - Coordinatensystem, dessen Anfangspunct o', und dessen Ordinatenaxe beliebig seien. Nennt man die Coordinaten irgend eines Puncts in Beziehung auf diese beiden Systeme resp. ξ, η und ξ', η', so sind die Transformationsformeln von der Form



$$\xi = k + a\xi' + b\eta' \qquad \eta = k' + a'\xi' + b'\eta'$$

worin a, b, a', b', k, k' constant sind. Setzt man $om = c$, so ist die Gleichung irgend eines Strahles mp in Beziehung auf das erste Coordinatensystem

$$\frac{\xi}{x} + \frac{\eta}{c} = 1$$

und daher in Beziehung auf das zweite Coordinatensystem

$$\frac{k + a\,\xi' + b\,\eta'}{x} + \frac{k' + a'\,\xi' + b'\,\eta'}{c} = 1.$$

Bezeichnet man nun mit x' die Strecke, welche der Strahl mp von der Abscissenaxe T' abschneidet, so erhält man $\xi' = x'$, wenn man $\eta' = 0$ setzt, und daher zwischen den beiden auf den Geraden T und T' befindlichen und einander entsprechenden Strecken x und x' die Beziehung

$$\frac{k + a\,x'}{x} + \frac{k' + a'x'}{c} = 1 \qquad \text{oder} \qquad x = \frac{c(k + ax')}{c - k' - a'x'}.$$

Substituirt man diesen Ausdruck für x in die Gleichung (1) [47] der Involution, so erhält man für x' eine Gleichung derselben Form, also bilden die Endpuncte der Strecken x' eine Involution n^{ten} Grades, und da hiebei diejenigen Gruppen, welche von den nämlichen Strahlen getroffen werden, gleichen Werthen von λ angehören, so sind die beiden Involutionen projectivisch [53].

55. Hieraus folgt unmittelbar: Hat man auf einer Geraden zwei projectivische Involutionen von beliebigen Graden und schneidet einen durch die Puncte dieser Involutionen gehenden Strahlbüschel mit einer anderen Geraden, so erzeugen die Strahlen auf der letzteren zwei projectivische Involutionen von denselben Graden.

§. 6.

56. Sind $X_1 = 0$, $X_2 = 0$ die Gleichungen zweier Geraden, so stellt die Gleichung

$$X_1 + \lambda X_2 = 0$$

für jeden Werth von λ eine Gerade dar, welche durch den Durchschnittspunct m der Geraden X_1 und X_2 hindurchgeht. — Denn für die Coordinaten von m verschwindet gleichzeitig X_1 und X_2 und daher auch $X_1 + \lambda X_2$.

57. Bezeichnet man mit $Y = X_1 + \lambda X_2 = 0$ eine durch m hindurchgehende Gerade, so ist die Grösse λ proportional

dem Verhältniss der Sinus der Winkel, welche Y mit X_1 und X_2 einschliesst, d. h.

$$\lambda = k \frac{\sin (X_1 Y)}{\sin (X_2 Y)},$$

wo k eine Grösse bedeutet, welche ihren Werth unverändert beibehält, so lange die Geraden X_1, X_2 fest bleiben.

B e w e i s. In Beziehung auf ein Fundamentaldreieck, welches die Geraden X_1 und X_2 zu Seiten hat, kann man nach [13] die Grössen X_1 und X_2 als homogene Coordinaten betrachten. Für einen Punct aber, der auf Y liegt, ist $X_1 + \lambda X_2 = 0$, also

$$\lambda = -\frac{X_1}{X_2}.$$

Bezeichnet man nun mit p_1 und p_2 die von diesem Puncte auf die Seiten X_1 und X_2 des Fundamentaldreiecks gefällten Perpendikel, so ist nach [14]

$$p_1 = \varrho A_1 X_1 \qquad p_2 = \varrho A_2 X_2$$

und daher

$$\lambda = -\frac{A_2}{A_1} \cdot \frac{p_1}{p_2}.$$

Die Perpendikel p_1, p_2 aber verhalten sich wie die Sinus der Winkel, welche Y mit X_1 und X_2 einschliesst, und zwar ist, wenn man die Winkel alle nach derselben Richtung hin positiv nimmt, mit Rücksicht auf [15]

$$-\frac{p_1}{p_2} = \frac{\sin (X_1 Y)}{\sin (X_2 Y)}$$

und daher

$$\lambda = \frac{A_2}{A_1} \cdot \frac{\sin (X_1 Y)}{\sin (X_2 Y)}.$$

Darin hängt der Coefficient $\frac{A_2}{A_1} = k$ davon ab, welche Grössen speciell als homogene Coordinaten gewählt werden, und bleibt dann ungeändert, so lange X_1 und X_2 fest bleiben.

Z u s a t z. Aus dem Vorigen folgt, dass die Gleichung j e d e r durch den Durchschnitt der Geraden $X_1 = 0$, $X_2 = 0$ gehenden Geraden in der Form $X_1 + \lambda X_2 = 0$ geschrieben werden kann; und giebt man dann der Grösse λ andere und andere Werthe, so bilden die entstehenden Geraden einen S t r a h l b ü s c h e l.

58. Bezeichnet man zwei Strahlen $X_1 = 0$ und $X_2 = 0$ eines Strahlbüschels mit a und b, und zwei andere Strahlen $X_1 + \lambda X_2 = 0$ und $X_1 + \lambda' X_2 = 0$ mit c und d, so ist nach [57]

$$\lambda = k \frac{\sin\,(ac)}{\sin\,(bc)}, \quad \lambda' = k \frac{\sin\,(ad)}{\sin\,(bd)}$$

und daher

$$\frac{\lambda}{\lambda'} = \frac{\sin\,(ac)}{\sin\,(bc)} : \frac{\sin\,(ad)}{\sin\,(bd)}.$$

Dies Verhältniss heisst ein Doppelverhältniss der vier Strahlen a, b, c, d und wird bezeichnet durch

$$(a\,b\,c\,d) = \frac{\sin\,(ac)}{\sin\,(bc)} : \frac{\sin\,(ad)}{\sin\,(bd)}.$$

59. Die Sätze [21]—[26] über Doppelverhältnisse von vier Puncten können ohne Weiteres auf Doppelverhältnisse von vier Strahlen übertragen werden und aus [25] folgt, dass

$$X_1 = 0, \; X_2 = 0, \; X_1 + \lambda X_2 = 0, \; X_1 - \lambda X_2 = 0$$

vier harmonische Strahlen darstellen, von denen die beiden ersten und die beiden letzten einander zugeordnet sind.

60. Ebenso wie in [30] beweist man, dass wenn die Gleichungen

$$X_1 + \lambda_1 X_2 = 0, \; X_1 + \lambda_2 X_2 = 0, \; X_1 + \lambda_3 X_2 = 0, \; X_1 + \lambda_4 X_2 = 0$$

vier Strahlen a, b, c, d eines Strahlbüschels darstellen, das Doppelverhältniss

$$(a\,b\,c\,d) = \frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_2 - \lambda_3} : \frac{\lambda_1 - \lambda_4}{\lambda_2 - \lambda_4}$$

ist.

61. Zwei Strahlbüschel, deren Gleichungen resp.

$$X_1 + \lambda X_2 = 0, \qquad X_1' + \lambda X_2' = 0$$

sind, heissen p r o j e c t i v i s c h, indem je zwei Strahlen, aus jedem der beiden Büschel einer, welche gleichen Werthen von λ angehören, als einander entsprechend betrachtet werden. Dadurch übertragen sich die Sätze [33] — [35] unmittelbar auf projectivische Strahlbüschel.

62. In zwei projectivischen Strahlbüscheln giebt es ein und nur ein Paar entsprechender rechter Winkel, d. h. in dem einen Strahlbüschel giebt es nur ein Paar auf einander senk-

recht stehender Strahlen, deren entsprechende in dem anderen Strahlbüschel ebenfalls auf einander senkrecht stehen.

Beweis. Seien s, t, a, b vier Strahlen des einen Büschels, s', t', a', b' die entsprechenden des andern, so ist [61], [33]

$$(s\,a\,t\,b) = (s'\,a'\,t'\,b'),$$

d. h. nach [58]

$$(1) \qquad \frac{\sin(s\,t)}{\sin(a\,t)} : \frac{\sin(s\,b)}{\sin(a\,b)} = \frac{\sin(s'\,t')}{\sin(a'\,t')} : \frac{\sin(s'\,b')}{\sin(a'\,b')}.$$

Ist nun $(s\,t) = 90^0$, und verlangt man, dass gleichzeitig auch $(s'\,t') = 90^0$ sei, so ist $\sin(s\,t) = \sin(s'\,t') = 1$, ferner $(a\,t) = (a\,s) + (s\,t) = (a\,s) + 90^0$, daher $\sin(a\,t) = \cos(a\,s)$ und ebenso $\sin(a'\,t') = \cos(a'\,s')$. Damit erhält man

$$\frac{\sin(ab)}{\cos(as)\,\sin(sb)} = \frac{\sin(a'b')}{\cos(a's')\,\sin(s'b')}.$$

Nun ist ferner $(sb) = (ab) - (as)$; $(s'b') = (a'b') - (a's')$. Substituirt man dies und kehrt die Brüche um, so kommt

$$\frac{\cos(as)\,\sin((ab)-(as))}{\sin(ab)} = \frac{\cos(a's')\,\sin((a'b')-(a's'))}{\sin(a'b')}.$$

Rechnet man nun in dem ersten Strahlbüschel alle Winkel von dem Strahle a aus, und in dem zweiten von dem Strahle a' aus, so sollen die Winkel $(a\,b)$, (as); $(a'\,b')$, $(a's')$ einfach mit den Buchstaben b, s; b', s' bezeichnet werden. Dann schreibt sich die vorige Gleichung

$$\frac{\cos s\,\sin(b-s)}{\sin b} = \frac{\cos s'\,\sin(b'-s')}{\sin b'},$$

und wenn man entwickelt und der Kürze wegen

$$\operatorname{cotg} b = B \qquad \operatorname{cotg} b' = B'$$

setzt,

$$\cos^2 s - B\sin s\cos s = \cos^2 s' - B'\sin s'\cos s'.$$

Führt man hier die doppelten Winkel $2s$ und $2s'$ ein, so erhält man

$$\cos 2s - B\sin 2s = \cos 2s' - B'\sin 2s'.$$

Diese Beziehung muss also zwischen den Winkeln s und s' stattfinden, wenn die Strahlen s, s' entsprechende Schenkel entsprechender rechter Winkel sein sollen. Ist nun c, c' ein neues Paar entsprechender Strahlen, und setzt man wie oben $(ac) = c$, $(a'c') = c'$, ferner

$$\cot g\, c = C, \qquad \cot g\, c' = C',$$

so hat man auch

$$\cos 2s - C \sin 2s = \cos 2s' - C' \sin 2s'.$$

Eliminirt man s' aus dieser und der vorigen Gleichung, so erhält man eine Gleichung, aus welcher die Lage des Strahls s von der verlangten Beschaffenheit sich ergiebt. Nun folgt

$$(B'-C') \cos 2s + (BC'-B'C) \sin 2s = (B'-C') \cos 2s'$$

$$(B-C) \sin 2s = (B'-C') \sin 2s',$$

also durch Quadriren und Addiren

$$(B'-C')^2 \cos^2 2s + 2(B'-C')(BC'-B'C) \sin 2s \cos 2s$$

$$+ [(B-C)^2 + (BC'-B'C)^2] \sin^2 2s = (B'-C')^2.$$

Vereinigt man jetzt die beiden in $(B'-C')^2$ multiplicirten Glieder, so zeigt sich, dass $\sin 2s$ als Factor auftritt. Allein für $s = 0$, wird auch $s' = 0$, und die Gleichung (1) zeigt, dass wenn der Strahl s mit a, und gleichzeitig s' mit a' zusammenfällt, diese Gleichung identisch erfüllt ist. Daher hat der Factor $\sin 2s$ für die vorliegende Aufgabe keine Bedeutung. Nach Unterdrückung desselben ergiebt sich dann

$$2(B'-C')(BC'-B'C) \cos 2s$$

$$+ [(B-C)^2 + (BC'-B'C)^2] \sin 2s = (B'-C')^2 \sin 2s$$

und daraus

$$\operatorname{tg} 2s = \frac{2(B'-C')(BC'-B'C)}{(B'-C')^2 - [(B-C)^2 + (BC'-B'C)^2]}.$$

Da sich nun $\operatorname{tg} 2s$ eindeutig bestimmen lässt, so giebt es zwei auf einander senkrecht stehende Strahlen, die die Forderung erfüllen, mithin immer ein und nur ein Paar entsprechender rechter Winkel.

63. Bei zwei projectivischen Strahlbüscheln ist das Product aus den Tangenten derjenigen Winkel, welche irgend zwei entsprechende Strahlen a, a' mit den ungleichnamigen Schenkeln der entsprechenden rechten Winkel (s, t' oder s', t) bilden, constant:

$$(1) \qquad \operatorname{tg}(sa) \operatorname{tg}(t'a') = \text{Const.}$$

Beweis. Es ist [61], [33] $(s\,t\,a\,b) = (s'\,t'\,a'\,b')$, wenn $a\,a'$, $b\,b'$ zwei Paare entsprechender Strahlen und s, s'; t, t' die

entsprechenden Schenkel der entsprechenden rechten Winkel bedeuten, also [58]

$$\frac{\sin(sa)}{\sin(ta)} : \frac{\sin(sb)}{\sin(tb)} = \frac{\sin(s'a')}{\sin(t'a')} : \frac{\sin(s'b')}{\sin(t'b')}.$$

Nun ist aber $(sa) = (st) + (ta) = 90^0 + (ta)$, also

$$\sin(sa) = \cos(ta), \quad \sin(ta) = -\cos(sa),$$

und ähnlich bei den übrigen. Man erhält demnach

$$\cot g\,(ta) : \cot g\,(tb) = -\operatorname{tg}(s'a') : -\operatorname{tg}(s'b')$$
$$= -\operatorname{tg}(sa) : -\operatorname{tg}(sb) = \cot g\,(t'a') : \cot g\,(t'b')$$

und daher

$$\frac{\operatorname{tg}(tb)}{\operatorname{tg}(ta)} = \frac{\operatorname{tg}(s'a')}{\operatorname{tg}(s'b')} = \frac{\operatorname{tg}(t'b')}{\operatorname{tg}(t'a')} = \frac{\operatorname{tg}(sa)}{\operatorname{tg}(sb)},$$

mithin

$$\operatorname{tg}(sa)\operatorname{tg}(t'a') = \operatorname{tg}(sb)\operatorname{tg}(t'b'),$$

d. h. dies Product bleibt ungeändert, wenn bb' an Stelle von aa' treten. (*Schröter*. Steiner's Vorl. pag. 35.)

64. Bei zwei concentrischen projectivischen Strahlbüscheln, d. h., solchen, deren Mittelpuncte zusammenfallen, giebt es stets zwei (reelle oder imaginäre) Strahlen, von denen jeder mit seinem entsprechenden zusammenfällt, und welche Doppelstrahlen heissen.

Beweis. Bezeichnet man mit den Buchstaben a, s, etc. die Winkel, welche die gleich benannten Strahlen mit irgend einem festen Strahle bilden, und bedeutet α eine Constante, so kann man die Gleichung (1) in [63] so schreiben

$$\operatorname{tg}(a - s)\operatorname{tg}(a' - t') = \alpha.$$

Wenn nun ein Strahl x mit dem ihm entsprechenden zusammenfällt, so muss der ihm angehörige Winkel x der Gleichung

$$\operatorname{tg}(x - s)\operatorname{tg}(x - t') = \alpha$$

genügen. Diese ist in Beziehung auf $\operatorname{tg} x$ quadratisch und hat daher zwei reelle oder imaginäre Wurzeln. In dem letztern Falle sagt man, die beiden Strahlbüschel haben zwei imaginäre Doppelstrahlen.

§. 7.

65. Zwei projectivische Strahlbüschel werden von zwei beliebigen Geraden in zwei projectivischen Punctreihen geschnitten.

Beweis. Nach [61] können zwei projectivische Strahlbüschel durch Gleichungen von der Form

$$X + \lambda Y = 0 \qquad X' + \lambda Y' = 0$$

dargestellt werden. Darin sei

$$X = \Sigma a_i x_i \qquad X' = \Sigma a_i' x_i$$
$$Y = \Sigma b_i x_i \qquad Y' = \Sigma b_i' x_i.$$

Schneidet man nun den ersten Strahlbüschel mit der Geraden $\Sigma m_i x_i = 0$ und den zweiten mit der Geraden $\Sigma m_i' x_i = 0$, so erhält man die Coordinaten der ersten Punctreihe aus der Auflösung der Gleichungen

$$X + \lambda Y = (a_1 + \lambda b_1) x_1 + (a_2 + \lambda b_2) x_2 + (a_3 + \lambda b_3) x_3 = 0$$
$$m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 = 0.$$

Diese ergiebt

$$x_1 : x_2 : x_3 = [(a_2 + \lambda b_2) m_3 - (a_3 + \lambda b_3) m_2] : \text{ etc.}$$
$$= [a_2 m_3 - a_3 m_2 + \lambda (b_2 m_3 - b_3 m_2)] : \text{ etc.}$$

Ebenso erhält man für die Verhältnisse der Coordinaten der zweiten Punctreihe

$$a_2' m_3' - a_3' m_2' + \lambda (b_2' m_3' - b_3' m_2') : \text{ etc.}$$

Nach [32] sind daher die beiden Punctreihen projectivisch.

66. Hieraus, und weil projectivische Punctreihen und Strahlbüschel durch drei Paar entsprechender Elemente bestimmt sind [35] [61], folgt: Legt man aus zwei beliebigen Mittelpuncten Strahlen durch die Puncte zweier projectivischer Punctreihen, so erhält man zwei projectivische Strahlbüschel.

67. In Folge der drei letzten Sätze können die von aufeinander liegenden Punctreihen und der Punctinvolution handelnden Sätze [39]—[45] unmittelbar auf concentrische Strahlbüschel und die Strahleninvolution übertragen werden; und ebenso wie in [46] beweist man, dass die nothwendige

und hinreichende Bedingung, dass drei Strahlenpaare aa', bb', cc' in Involution sind, durch jede der folgenden vier Gleichungen ausgedrückt werden kann:

$$\sin(ab')\sin(bc')\sin(ca') = \sin(ac')\sin(ba')\sin(cb')$$
$$\sin(ab')\sin(b\,c)\sin(c'a') = \sin(a\,c)\sin(ba')\sin(c'b')$$
$$\sin(b\,c')\sin(c\,a)\sin(a'b') = \sin(b\,a)\sin(cb')\sin(a'c')$$
$$\sin(ca')\sin(a\,b)\sin(b'c') = \sin(c\,b)\sin(ac')\sin(b'a')$$

68. Sieht man einen Strahlbüschel als zwei sich vollkommen deckende projectivische Strahlbüschel an, so folgt aus [65]: Ein Strahlbüschel wird von zwei beliebigen Geraden in zwei projectivischen Punctreihen geschnitten. In diesem Falle sagt man, die Punctreihen befinden sich in perspectivischer Lage. In dem Durchschnitte der beiden Geraden sind dann zwei entsprechende Puncte vereinigt.

69. Wenn in dem Durchschnitte a der Träger zweier projectivischer Punctreihen zwei entsprechende Puncte vereinigt sind, so liegen die Punctreihen perspectivisch d. h. [68] die Verbindungslinien entsprechender Puncte schneiden sich in einem Puncte.

Beweis. Sind aa' die beiden in dem Durchschnitte a vereinigt liegenden entsprechenden Puncte, bb', cc' zwei weitere Paare entsprechender Puncte, so ist [35] zu jedem Puncte d der entsprechende d' eindeutig bestimmt. Ist nun aber m der Durchschnitt der Geraden bb', cc', so erhält man einen Strahlbüschel $m(a\,b\,c\,d\,\ldots)$, und dieser muss die zweite Gerade nach [68] in den entsprechenden Puncten $a'\,b'\,c'\,d'\,\ldots$ schneiden.

70. Sieht man eine Punctreihe als zwei sich deckende projectivische Punctreihen an, so folgt aus [66]: Die von zwei beliebigen Mittelpuncten m und m' nach den Puncten einer Punctreihe gehenden Strahlen bilden zwei projectivische Strahlbüschel. In diesem Falle sagt man, die Strahlbüschel befinden sich in perspectivischer Lage. Die Schnittpuncte entsprechender Strahlen liegen also dann in einer Geraden, welche der perspectivische Durchschnitt heisst. In der Geraden, welche die beiden Mittelpuncte verbindet, sind ferner zwei entsprechende Strahlen vereinigt.

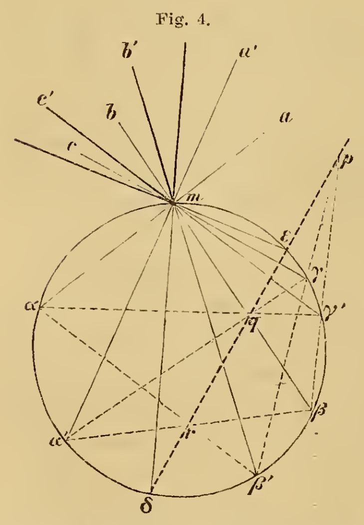
71. Wenn bei zwei projectivischen Strahlbüscheln die Verbindungslinie der Mittelpuncte m und m' zwei entsprechende Strahlen vereinigt enthält, so liegen die Strahlbüschel perspectivisch, d. h. die Schnittpuncte entsprechender Strahlen liegen in einer Geraden.

Beweis. Nimmt man zu den beiden in der Geraden mm' vereinigten Strahlen noch zwei Paare entsprechender Strahlen hinzu, so sind einerseits die beiden projectivischen Büschel bestimmt; andererseits bestimmen die Durchschnitte der letzteren beiden Strahlenpaare eine Gerade. Verbindet man die Puncte derselben mit m und m', so erhält man die entsprechenden Strahlen der durch die obigen drei Paare bestimmten Büschel [70].

72. Aufgabe. Bei zwei concentrischen projectivischen Strahlbüscheln die Doppelstrahlen zu construiren.

Auflösung. (Fig. 4.) Man lege durch den Mittelpunct m einen beliebigen Kreis. Sind nun $a\,b\,c$ drei gegebene Strahlen des einen, $a'\,b'\,c'$ die entsprechenden Strahlen des anderen Büschels, so schneide man mit diesen den Kreis in $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$. Suche sodann die Durchschnitte

Fig. 4.



$$(\beta\gamma', \beta'\gamma) = p,$$
$$(\gamma\alpha', \gamma'\alpha) = q,$$
$$(\alpha\beta', \alpha'\beta) = r.$$

Diese drei Puncte liegen in einer Geraden (man braucht daher nur zwei derselben zu bestimmen), und sind dann δ, ε die Puncte, in welchen diese Gerade pqr den Kreis schneidet, so sind $m\delta$ und $m\varepsilon$ die gesuchten Doppelstrahlen. Trifft die Gerade pqr den Kreis nicht, so sind die Doppelstrahlen imaginär.

Beweis. Betrachtet man α als Mittelpunct eines Strahlbüschels $\alpha(\alpha'\beta'\gamma')$, so ist derselbe mit dem gegebenen Büschel $m(a'b'c')$, oder was dasselbe

ist, mit $m(\alpha'\beta'\gamma')$ congruent, weil der von jedem Strahlenpaar gebildete Winkel dem von dem entsprechenden Paare gebildeten Winkel gleich ist (als Peripheriewinkel auf gleichem Bogen). Ebenso ist der Büschel $\alpha'(\alpha\,\beta\,\gamma)$ congruent mit $m(a\,b\,c)$. Demnach ist

$$\alpha\,(\alpha'\,\beta'\,\gamma')\ \overline{\wedge}\ \alpha'\,(\alpha\,\beta\,\gamma)^{*)},$$

und da die beiden entsprechenden Strahlen $\alpha\,\alpha'$ und $\alpha'\,\alpha$ dieselbe Gerade bilden, so [71] liegen die beiden Büschel perspectivisch, und $q\,r$ ist ihr perspectivischer Durchschnitt. Ist nun δ einer der Puncte, in welchen die Gerade qr den Kreis schneidet, so sind $\alpha\,\delta$ und $\alpha'\,\delta$ entsprechende Strahlen in den Büscheln $\alpha\,(\alpha'\,\beta'\,\gamma')$ und $\alpha'(\alpha\,\beta\,\gamma)$, aber dem $\alpha\,\delta$ entspricht in dem Büschel $m(a\,b\,c)$ der Strahl $m\delta$, und dem $\alpha'\delta$ in dem Büschel $m(a'\,b'\,c')$ der nämliche Strahl $m\delta$, folglich entspricht in den Büscheln $m(a\,b\,c)$ und $m\,(a'\,b'\,c')$ der Strahl $m\delta$ sich selbst und ist daher ein Doppelstrahl. Dasselbe gilt von $m\,\varepsilon$, welcher nach dem zweiten Schnittpuncte der Geraden qr mit dem Kreise gerichtet ist. Man gelangt zu demselben Resultat, wenn man statt der Puncte α und α' zwei andere entsprechende β, β' (oder γ, γ') als Mittelpuncte der Strahlbüschel $\beta\,(\alpha'\,\beta'\,\gamma')$ und $\beta'(\alpha\,\beta\,\gamma)$ (oder $\gamma\,(\alpha'\,\beta'\,\gamma')$ und $\gamma'(\alpha\,\beta\,\gamma)$) anwendet. Diese liegen ebenfalls perspectivisch, und ihr perspectivischer Durchschnitt ist $p\,r$ (oder $p\,q$). Da die gegebenen Büschel nur zwei Doppelstrahlen haben können [64], so müssen die Geraden $p\,r$ und $p\,q$ den Kreis in den nämlichen Puncten δ und ε treffen, wie die Gerade $q\,r$, und daher liegen $p\,q\,r$ in einer Geraden. (*Schröter.* Steiner's Vorlesungen §. 15.)

73. Aufgabe. Bei zwei aufeinander liegenden projectivischen Punctreihen die Doppelpuncte zu construiren.

Auflösung. Aus einem beliebig gewählten Mittelpuncte m ziehe man Strahlen $m(a\,b\,c)$ und $m\,(a'\,b'\,c')$ nach drei Paaren entsprechender Puncte der Punctreihen und construire in den entstehenden projectivischen und concentrischen Strahlbüscheln nach [72] die Doppelstrahlen, so treffen diese den Träger der Punctreihen in den Doppelpuncten [65].

---

*) Das Zeichen $\overline{\wedge}$ bedeutet projectivisches Entsprechen.

74. Aufgabe. Wenn eine Strahleninvolution durch zwei Paare conjugirter Strahlen aa', bb' gegeben ist, die Doppelstrahlen zu construiren; oder was [67] [44] dasselbe ist, das Strahlenpaar zu construiren, welches jedes der beiden gegebenen Paare harmonisch trennt.

Auflösung 1. Die Involution besteht [40, 67] aus zwei concentrischen projectivischen Strahlbüscheln, und zwar entsprechen den Strahlen a, a', b, b' der Reihe nach die Strahlen a', a, b', b. Construirt man nach [72] die Doppelstrahlen dieser beiden Büschel, so sind diese die gesuchten Doppelstrahlen der Involution. Diese Construction bleibt ausführbar, da man zu derselben von den Puncten p, q, r nur zwei bedarf. Der dritte wird aber auch nicht unbestimmt, sondern tritt als der Durchschnittspunct zweier Tangenten an dem Kreise auf.

Auflösung 2. Man schneide die Strahleninvolution durch eine beliebige Gerade und construire zu der auf dieser Geraden entstehenden Punctinvolution nach [75. Aufl. 2] die Doppelpuncte. Die letzteren liefern mit dem Mittelpuncte der Strahleninvolution verbunden, die Doppelstrahlen.

Auflösung 3. S. [128.]

75. Aufgabe. Wenn auf einer Geraden A eine Punctinvolution durch zwei Paare conjugirter Puncte aa', bb' gegeben ist, die Doppelpuncte zu construiren; oder was [44] dasselbe ist, das Punctepaar zu construiren, welches die beiden gegebenen Paare gleichzeitig harmonisch trennt.

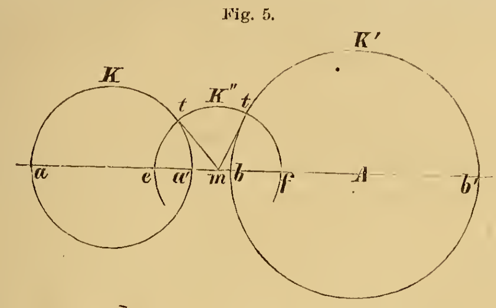
Auflösung 1. Aus einem beliebig gewählten Mittelpuncte ziehe man Strahlen nach den gegebenen Puncten und construire zu der entstehenden Strahleninvolution nach [74. Aufl. 1 oder 3] die Doppelstrahlen, so schneiden diese die Gerade A in den gesuchten Doppelpuncten.

Auflösung 2. (Fig. 5.) Man construire zwei Kreise K und K' über den Strecken aa' und bb' als Durchmesser, und dann einen Kreis K'', welcher die beiden ersten rechtwinklig schneidet, so trifft dieser die Gerade A in den gesuchten Doppelpuncten. Man bestimmt daher den Durchschnitt m der Chordale von K und K' mit A, zieht aus m eine Tangente mt an einen der beiden Kreise K oder K' und macht auf A die Strecken $me = mf = mt$, so sind e, f die gesuchten Puncte.

Schneiden sich die Kreise K und K', so werden die Puncte e, f imaginär.

Beweis. Es giebt bekanntlich (*Hesse.* Vorl. aus der anal. Geom. der geraden Linie, etc. Vorl. 12) unendlich viele Kreise K'', welche die beiden anderen K und K' rechtwinklig schneiden.

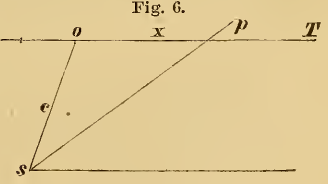
Fig. 5.



Aber alle diese Kreise K'' bilden ein System von Chordalkreisen, deren Chordale die Gerade A ist, und deren Mittelpuncte auf der Chordale von K und K' liegen. Sie treffen die Gerade A alle in denselben zwei Puncten e, f, nämlich den Grenzpuncten der Chordalkreise K und K'. Demnach ist $mt = me = mf$. Da aber $mt^2 = ma \, . \, ma' = mb \, . \, mb'$ ist, so trennen die Puncte e, f jedes der beiden Paare aa' und bb' harmonisch. (S. *Schröter.* Steiner's Vorlesungen §. 8.)

76. Zieht man aus einem beliebigen Mittelpuncte s Strahlen nach den Punctgruppen einer Involution n^{ten} Grades [47], so bilden diese Strahlengruppen eine Strahleninvolution n^{ten} Grades. Um diese durch eine Gleichung auszudrücken, nehme man s (Fig. 6) zum Anfangspuncte eines Parallelcoordinatensystems, dessen Abscissenaxe dem Träger T der Punctinvolution parallel sei, und lege die Ordinatenaxe durch den Punct o, von welchem aus die Strecken x der Punctinvolution in [47] gerechnet werden; ausserdem sei $so = c$. Sind nun

Fig. 6.



ξ, η die Coordinaten in Beziehung auf dieses System, so ist $\eta = m\xi$ die Gleichung irgend eines durch s gehenden Strahls sp, und wenn dieser den Träger T in dem Abstande x von o trifft, so wird seiner Gleichung durch die Werthe $\xi = x$, $\eta = c$

genügt, sodass er die Gleichung $\eta = \frac{c\xi}{x}$ erhält, aus welcher $x = \frac{c\xi}{\eta}$ folgt. Substituirt man diesen Ausdruck in die Gleichung der Punctinvolution, nämlich in

(1) $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n + \lambda(b_0x^n + b_1x^{n-1} + \ldots + b_n) = 0,$

so erhält man die Strahleninvolution dargestellt durch eine Gleichung von der Form

(2) $$\varphi(\xi, \eta) + \lambda\psi(\xi, \eta) = 0,$$

worin φ und ψ ganze homogene Functionen n^{ten} Grades bedeuten. In diesen Gleichungen sind solche Punctgruppen (x) und Strahlengruppen (ξ, η) entsprechende, welche den nämlichen Werthen von λ angehören. Dreht man die Coordinatenaxen um den Punct s, oder was auf dasselbe hinaus kommt, dreht man die Strahleninvolution um den Punct s, so ändert sich die Form der Gleichung (2) nicht. Da man ausserdem von der Gleichung (2) wieder zu (1) zurückgelangen kann, so folgt, dass die erstere Gleichung allemal eine Strahleninvolution darstellt. Wenn nun mehrere Punct- und Strahleninvolutionen verschiedener (oder auch gleicher) Grade durch Gleichungen von der Form (1) und (2) gegeben sind, so sollen solche Punct- und Strahlengruppen, welche gleichen Werthen von λ angehören, projectivisch entsprechend genannt werden. Punct- und Strahleninvolutionen vom ersten Grade sind einfache Punctreihen und Strahlenbüschel [48], und es folgt unmittelbar aus [61], dass zwei projectivische Strahleninvolutionen ersten Grades nichts anderes sind, als zwei projectivische Strahlbüschel. Endlich ergiebt sich aus [49], dass eine Strahleninvolution zweiten Grades mit der in [67] schlechtweg so genannten Strahleninvolution zusammenfällt.

§. 8.

77. Eine Gerade, welche durch die Ecke III ($x_1 = 0$, $x_2 = 0$, [13]) des Fundamentaldreiecks und durch einen Punct a mit den Coordinaten a_1, a_2, a_3 geht, hat die Gleichung

$$a_2x_1 - a_1x_2 = 0.$$

Beweis. Da die zu bestimmende Gerade durch den Durchschnitt der Geraden $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ geht, so ist [57] ihre Gleichung von der Form $x_1 + \lambda x_2 = 0$. Da sie aber

auch durch a geht, so ist $a_1 + \lambda a_2 = 0$. Hieraus folgt $\lambda = -\frac{a_1}{a_2}$, und wenn man dies substituirt, die obige Gleichung.

78. Bei allen Puncten, welche auf einer durch die Ecke III gehenden Geraden liegen, kann man den Coordinaten x_1 und x_2 die nämlichen Werthe zuertheilen, sodass die nähere Bestimmung der Lage des Puncts lediglich von dem Werthe von x_3 abhängt.

Beweis. Ist a irgend ein auf der Geraden liegender Punct, so hat [77] die Gerade die Gleichung $a_2 x_1 - a_1 x_2 = 0$, d. h. für alle auf der Geraden liegenden Puncte ist das Verhältniss $\frac{x_1}{x_2} = \frac{a_1}{a_2}$, also constant.

79. (Fig. 7.) Sind α, β zwei Puncte, resp. auf den Seiten $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ des Fundamentaldreiecks, und a_1, a_2, a_3 die Coordinaten des Punctes a, in welchem die Geraden $I\alpha$ und $II\beta$ sich treffen, so lautet die Gleichung der Geraden $\alpha\beta$:

$$\frac{x_1}{a_1} + \frac{x_2}{a_2} - \frac{x_3}{a_3} = 0.$$

Fig. 7.

Beweis. Die Coordinaten der Puncte α und β sind resp., $0, a_2, a_3$ und $a_1, 0, a_3$ [78]. Setzt man diese in die Gleichung einer beliebigen Geraden

$$m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 = 0,$$

um die Bedingungen auszudrücken, dass diese durch die Puncte α und β gehe, so erhält man

$$m_2 a_2 + m_3 a_3 = 0$$
$$m_1 a_1 + m_3 a_3 = 0.$$

Eliminirt man m_1, m_2, m_3 aus diesen drei Gleichungen, so erhält man als Gleichung der Geraden $\alpha\beta$

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 0 & a_2 & a_3 \\ a_1 & 0 & a_3 \end{vmatrix} = a_2 a_3 x_1 + a_3 a_1 x_2 - a_1 a_2 x_3 = 0,$$

woraus durch Division mit $a_1 a_2 a_3$ die obige Gleichung folgt.

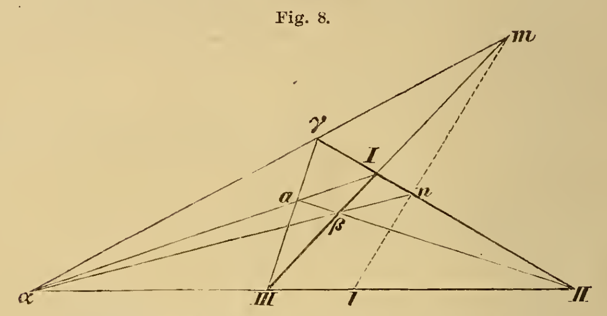
80. Zieht man durch einen beliebigen Punct a und die

Ecken eines Dreiecks *I II III* (Fig. 8) Gerade, welche die gegenüberliegenden Seiten in α, β, γ schneiden, und schneidet dann mit $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$, $\alpha\beta$ die dritten Seiten auf's Neue in l, m, n, so liegen diese drei Puncte in einer Geraden und sind harmonisch zugeordnet zu resp. α, β, γ in Beziehung auf *II III*, *III I*, *I II*. Nimmt man *I II III* zum Fundamentaldreieck und nennt a_1, a_2, a_3 die Coordinaten von a, so ist

$$\frac{x_1}{a_1} + \frac{x_2}{a_2} + \frac{x_3}{a_3} = 0$$

die Gleichung der Geraden $l\,m\,n$.

Fig. 8.



Beweis. Die Gleichungen der Geraden $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$, $\alpha\beta$ sind nach [79]

$$\beta\gamma \ldots -\frac{x_1}{a_1} + \frac{x_2}{a_2} + \frac{x_3}{a_3} = 0$$

$$\gamma\alpha \ldots\ldots \frac{x_1}{a_1} - \frac{x_2}{a_2} + \frac{x_3}{a_3} = 0$$

$$\alpha\beta \ldots\ldots \frac{x_1}{a_1} + \frac{x_2}{a_2} - \frac{x_3}{a_3} = 0.$$

Die Puncte l, m, n sind die Schnitte dieser Geraden mit resp. $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$; daher sind diese Puncte auch die Schnitte folgender Geraden:

$$l \ \ldots x_1 = 0 \text{ mit } \frac{x_2}{a_2} + \frac{x_3}{a_3} = 0$$

$$m \ldots x_2 = 0 \text{ mit } \frac{x_3}{a_3} + \frac{x_1}{a_1} = 0$$

$$n \ldots x_3 = 0 \text{ mit } \frac{x_1}{a_1} + \frac{x_2}{a_2} = 0.$$

Nun sind aber dieselben Puncte auch die Schnitte von

$$x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0$$

mit einer und derselben Geraden, nämlich mit

$$\frac{x_1}{a_1} + \frac{x_2}{a_2} + \frac{x_3}{a_3} = 0,$$

folglich liegen $l\ m\ n$ alle drei auf dieser Geraden. Nach dem Vorigen sind ferner die Gleichungen der Geraden $I\,l$, $II\,m$, $III\,n$ folgende:

$$I\,l \ldots \frac{x_2}{a_2} + \frac{x_3}{a_3} = 0, \qquad II\,m \ldots \frac{x_3}{a_3} + \frac{x_1}{a_1} = 0,$$
$$III\,n \ldots \frac{x_1}{a_1} + \frac{x_2}{a_2} = 0$$

und nach [77] die der Geraden $I\,\alpha$, $II\,\beta$, $III\,\gamma$:

$$I\alpha \ldots \frac{x_2}{a_2} - \frac{x_3}{a_3} = 0, \qquad II\beta \ldots \frac{x_3}{a_3} - \frac{x_1}{a_1} = 0,$$
$$III\gamma \ldots \frac{x_1}{a_1} - \frac{x_2}{a_2} = 0,$$

folglich sind [59] $I\,(II\ III\ l\ \alpha)$ vier harmonische Strahlen, und daher $II\ III\ l\ \alpha$ vier harmonische Puncte. Ebenso bei den übrigen.

81. Schneidet eine Gerade die Seiten $II\ III$, $III\ I$, $I\ II$ eines Dreiecks (Fig. 8) in l, m, n, und sind α, β, γ harmonisch zugeordnet zu resp. l, m, n in Beziehung auf $II\ III$, $III\ I$, $I\ II$, so schneiden sich die Geraden $I\,\alpha$, $II\,\beta$, $III\,\gamma$ in einem Puncte a.

B e w e i s. Ist $\frac{x_1}{a_1} + \frac{x_2}{a_2} + \frac{x_3}{a_3} = 0$ die Gleichung der gegebenen Geraden in Beziehung auf $I\ II\ III$ als Fundamentaldreieck, so haben die Geraden $I\,l$, $II\,m$, $III\,n$ die Gleichungen

$$I\,l \ldots \frac{x_2}{a_2} + \frac{x_3}{a_3} = 0, \qquad II\,m \ldots \frac{x_3}{a_3} + \frac{x_1}{a_1} = 0,$$
$$III\,n \ldots \frac{x_1}{a_1} + \frac{x_2}{a_2} = 0.$$

Sodann ist nach [59]

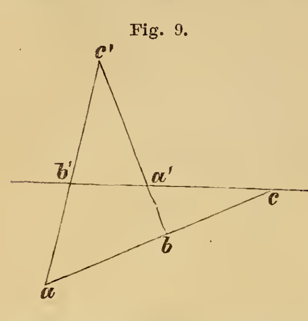
$$I\,\alpha \ldots \frac{x_2}{a_2} - \frac{x_3}{a_3} = 0, \qquad II\,\beta \ldots \frac{x_3}{a_3} - \frac{x_1}{a_1} = 0,$$
$$III\,\gamma \ldots \frac{x_1}{a_1} - \frac{x_2}{a_2} = 0.$$

Die Summe der linken Theile der drei letzten Gleichungen aber ist identisch Null, mithin genügen die Coordinaten des Durchschnittspuncts der beiden ersten Geraden auch der dritten

Gleichung, und folglich schneiden sich diese drei Geraden in einem Puncte, dessen Coordinaten nach [77] a_1, a_2, a_3 sind.

82. Hat man in der Ebene zwei beliebige Punctepaare $a\,a'$ und $b\,b'$, so bestimmen dieselben stets ein drittes Punctepaar $c\,c'$ (Fig. 9) als Durchschnitte der Geraden $(a\,b,\ a'\,b')$ und $(a b', a' b)$, welche je zwei Puncte, die nicht demselben Paare angehören, verbinden. Solche sechs Puncte bilden dann die Ecken eines vollständigen Vierseits; und nimmt man aus jedem Paare einen Punct, so erhält man zwei dreipunctige Gruppen z. B. abc, $a'b'c'$, die allemal die Eigenschaft haben, dass die Puncte der einen Gruppe (abc) auf einer Geraden liegen, und die der anderen $(a'b'c')$ ein Dreieck bilden, dessen Seiten durch die Puncte der ersten Gruppe hindurchgehen. (Ebenso auch $a'bc'$ und $ab'c$, $ab'c'$ und $a'bc$, etc.)

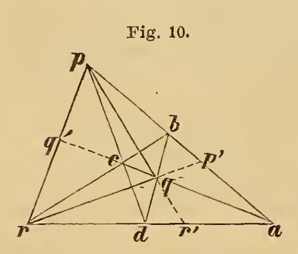
Fig. 9.



83. Aufgabe. Wenn drei Puncte pqr gegeben sind, so soll ein vollständiges Viereck $abcd$ construirt werden, welchem pqr als Diagonaldreieck angehört. (Fig. 10.)

Auflösung. Einen Punct a des Vierecks kann man willkürlich annehmen. Verbindet man diesen mit p, q, r, so sind diese Geraden drei Seiten des gesuchten Vierecks, und man findet die drei übrigen, wenn man zu jeder der Verbindungslinien pa, qa, ra den zugeordneten harmonischen Strahl construirt in Bezug auf die in der betreffenden Ecke zusammenstossenden Seiten des Dreiecks, wie aus den harmonischen Eigenschaften des vollständigen Vierecks folgt. (*Schröter*. Steiner's Vorlesungen pag. 17.) Natürlich braucht diese Construction nur für eine Ecke z. B. p ausgeführt zu werden; denn ist pcd der gesuchte harmonische Strahl, so schneidet derselbe die Geraden aq und ar in c und d, und zuletzt ist $b = (ap, cr)$ oder (ap, dq).

Fig. 10.



Anmerkung. Es giebt daher unendlich viele vollstän-

dige Vierecke, welchen dasselbe Diagonaldreieck angehört; das Viereck ist aber bestimmt, sobald eine Ecke desselben angenommen ist.

Dritter Abschnitt.

Hülfssätze über Kegelschnitte.

§. 1.

84. Die erforderliche und hinreichende Bedingung, dass ein Kegelschnitt, der die Gleichung hat

$$(1)\qquad u = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{31}x_3x_1 + 2a_{12}x_1x_2 = 0,$$

wobei $a_{hk} = a_{kh}$ sei, aus zwei Geraden besteht, ist

$$D = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Beweis. Wenn der Kegelschnitt aus zwei Geraden besteht, also der linke Theil der Gleichung (1) in zwei lineare Factoren zerfällt, so seien

$$P = p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 \qquad Q = q_1x_1 + q_2x_2 + q_3x_3$$

diese Factoren, also

$$u = PQ.$$

Dann hat man

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = q_i P + p_i Q.$$

Für den Punct m, in welchem die beiden Geraden sich schneiden, verschwinden P und Q gleichzeitig, daher ist für diesen Punct auch gleichzeitig

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x_3} = 0,$$

oder

$$(2)\qquad \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= 0, \end{aligned}$$

d. h. der Punct m ist der gemeinschaftliche Durchschnitt dieser drei Geraden. Eliminirt man aber $x_1\, x_2\, x_3$ aus den Gleichungen (2), so folgt $D = 0$.

Umgekehrt: ist $D=0$, so bestehen die drei Gleichungen (2) gleichzeitig, und daher giebt es drei Zahlen λ_1, λ_2, λ_3, von der Eigenschaft, dass wenn man die linken Theile dieser Gleichungen mit ihnen multiplicirt, und die Producte addirt, die Summe identisch Null ist. Für diese Zahlen ist daher

$$\lambda_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + \lambda_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + \lambda_3 \frac{\partial u}{\partial x_3} = 0.$$

Führt man nun statt der Variabeln x_1, x_2, x_3 drei andere y_1, y_2, y_3 ein, indem man setzt

$$x_1 = y_1 + \lambda_1 y_3, \quad x_2 = y_2 + \lambda_2 y_3, \quad x_3 = \lambda_3 y_3,$$

so ist

$$\frac{\partial u}{\partial y_3} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial y_3} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial y_3} + \frac{\partial u}{\partial x_3}\frac{\partial x_3}{\partial y_3}$$
$$= \lambda_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + \lambda_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + \lambda_3 \frac{\partial u}{\partial x_3};$$

also verschwindet $\frac{\partial u}{\partial y_3}$, und folglich wird dann u eine homogene Function 2ten Grades von y_1 und y_2 und enthält y_3 nicht. Eine homogene Function von zwei Variabeln aber lässt sich stets in lineare Factoren zerlegen. (Vgl. *Hesse*. Zur Theorie der ganzen homogenen Functionen. Crelle's Journ. Bd. 56, pag. 268.)

§. 2.

85. Der geometrische Ort der Durchschnitte entsprechender Strahlen zweier projectivischer Strahlbüschel ist ein Kegelschnitt, welcher durch die Mittelpuncte der beiden Strahlbüschel geht.

Beweis. Bedeuten A, A', B, B' lineare Ausdrücke, so sind [61]

$$A + \lambda A' = 0 \qquad B + \lambda B' = 0$$

die Gleichungen zweier projectivischer Strahlbüschel, und gleichen Werthen von λ gehören entsprechende Strahlen zu. Man erhält daher den geometrischen Ort der Durchschnitte entsprechender Strahlen, wenn man λ eliminirt. Das giebt

$$AB' - A'B = 0,$$

welches, wie man sieht, ein Kegelschnitt ist, der durch die Durchschnitte der Geradenpaare $A=0$, $A'=0$ und $B=0$, $B'=0$ geht.

86. Zieht man aus zwei Puncten m, m' eines Kegelschnittes Strahlen nach allen übrigen Puncten $a, b, c, d, \ldots$ desselben, so sind die Strahlbüschel $m(a, b, c, d, \ldots)$ und $m'(a, b, c, d, \ldots)$ projectivisch, und je zwei Strahlen entsprechende, die nach demselben Puncte des Kegelschnitts gerichtet sind.

Beweis. Betrachtet man zunächst nur drei Puncte a, b, c, so ist der Kegelschnitt durch sie und durch m, m' bestimmt; zugleich aber sind durch die zwei Strahlengruppen $m(a, b, c)$ und $m'(a, b, c)$ auch [61] [35] zwei projectivische Strahlbüschel bestimmt, deren entsprechende Strahlenpaare md, $m'd$, etc. sich nach [85] auf dem Kegelschnitte $mm'abc$ schneiden, folglich sind umgekehrt je zwei nach demselben Puncte des Kegelschnitts gerichtete Strahlen einander projectivisch entsprechend.

87. (Fig. 11.) Bezeichnet man sechs Puncte eines Kegelschnittes in beliebiger Reihenfolge genommen mit 1, 2, 3, 4, 5, 6 und bildet aus ihnen, indem man je zwei auf einander folgende durch eine Gerade verbindet, ein einfaches Sechseck, so liegen die Durchschnittspuncte der drei Paare gegenüberliegender Seiten

$$(12, 45) = h, \quad (23, 56) = k, \quad (34, 61) = l$$

auf einer Geraden. (*Pascal's* Theorem.)

Beweis. Bezeichnet man die durch die Puncte 12, 23, etc. gehenden Geraden durch $A_{12} = 0$, $A_{23} = 0$, etc., so kann man den Kegelschnitt, weil er sowohl durch 1 2 3 4 als auch durch 4 5 6 1 geht, in folgenden Formen darstellen

$$A_{12} A_{34} - \lambda A_{14} A_{23} = 0 \quad \text{und} \quad A_{45} A_{61} - \mu A_{41} A_{56} = 0,$$

wo λ, μ gewisse constante Factoren bedeuten. Die linken Theile dieser Gleichungen müssen daher bis auf einen constanten Factor ν identisch sein; d. h. es ist

$$A_{12} A_{34} - \lambda A_{14} A_{23} \equiv \nu (A_{45} A_{61} - \mu A_{41} A_{56}),$$

also auch

$$A_{12} A_{34} - \nu A_{45} A_{61} \equiv A_{14} (\lambda A_{23} - \mu \nu A_{56}).$$

Setzt man dies gleich Null, so erhält man die Gleichung eines Kegelschnitts, welcher, wie die linke Seite zeigt, durch folgende vier Puncte geht:

$$(A_{12}, A_{45}) = h, \; (A_{34}, A_{61}) = l, \; (A_{12}, A_{61}) = 1, \; (A_{34}, A_{45}) = 4.$$

Wegen der rechten Seite aber besteht dieser Kegelschnitt aus den beiden Geraden $A_{14} = 0$ und $\lambda A_{23} - \mu \nu A_{56} = 0$, und da die erstere die Gerade 14 ist, so muss die letztere die Gerade hl sein. Aber, wie ihre Gleichung zeigt, geht diese durch den Durchschnitt $(A_{23}, A_{56}) = k$, also liegen h, k, l auf einer Geraden. (*Salmon.* Anal. Geom. d. Kegelschnitte, deutsch von *Fiedler*, 2te Aufl. pag. 298.)

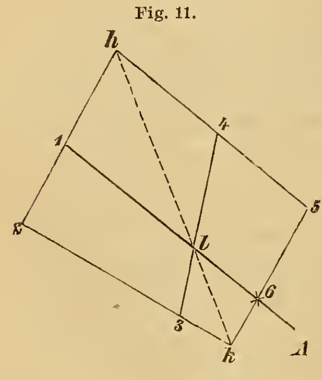
88. Liegen sechs Puncte 1, 2, 3, 4, 5, 6 so, dass die Durchschnittspuncte

$$(12, 45) = h, \quad (23, 56) = k, \quad (34, 61) = l$$

auf einer Geraden liegen, so befinden sie sich auf einem Kegelschnitte. (Fig. 11.)

Beweis. Durch fünf von den sechs Puncten z. B. 1, 2, 3, 4, 5 ist ein Kegelschnitt K bestimmt. Wenn nun x der Punct ist, in welchem $l1$ diesen Kegelschnitt zum zweiten Male schneidet, so muss dieser nach [87] auch auf der Ge-Geraden $k5$ liegen. Der Annahme nach aber ist 6 der Durchschnitt von $k5$ und $l1$, also fällt 6 mit x zusammen und befindet sich daher auf dem Kegelschnitte K.

Fig. 11.



89. Aufgabe. Wenn ein Kegelschnitt durch fünf Puncte 1, 2, 3, 4, 5 gegeben ist, einen beliebigen sechsten Punct desselben zu construiren, z. B. denjenigen Punct 6, in welchem eine durch 1 beliebig gezogene Gerade A den Kegelschnitt zum zweiten Male schneidet. (Fig. 11.)

Constructionsvorschrift. Man bezeichne die gegebenen Puncte in beliebiger Ordnung mit 1, 2, 3, 4, 5 und bestimme

$$(12, 45) = h, \quad (34, A) = l, \quad (23, hl) = k,$$

so ist

$$(k5, A) = 6$$

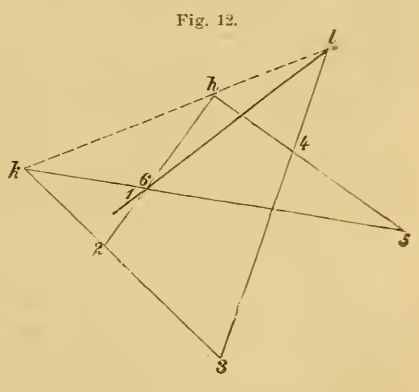
der gesuchte Punct.

Beweis. In Folge dieser Construction liegen die Puncte 1, 2, 3, 4, 5, 6 so, dass sie die in [88] angegebene Bedingung erfüllen, und daher befindet sich 6 auf dem durch 1, 2, 3, 4, 5 bestimmten Kegelschnitte und zugleich auf der Geraden A.

Bemerkung. Diese Construction ändert sich nicht, wenn an die Stelle zweier gegebener Puncte einer, und ausserdem die Tangente in demselben tritt. Denn man braucht dann nur den gegebenen Berührungspunct als zwei, und zwar zwei aufeinander folgende Puncte zu betrachten, und die Tangente als die Verbindungsgerade derselben.

90. Aufgabe. Wenn ein Kegelschnitt durch fünf Puncte 1, 2, 3, 4, 5 gegeben ist, in einem derselben, z. B. 1, die Tangente zu construiren. (Fig. 12.)

Fig. 12.



Constructionsvorschrift. Man bezeichne die gegebenen Puncte in beliebiger Ordnung mit 1, 2, 3, 4, 5 und bestimme

$$(12, 45) = h,$$
$$(23, 51) = k,$$
$$(34, hk) = l,$$

so ist l 1 die gesuchte Tangente in 1.

Beweis. Denkt man sich in 1 zwei Puncte 1, 6 zusammenliegend, so vertritt die Gerade 51 die Stelle der Geraden 56. Der Construction zufolge und wegen [88] liegen dann auf der Geraden l 1 zwei Puncte 6, 1 des Kegelschnittes in 1 vereinigt, und daher ist l 1 Tangente.

91. Aufgabe. Wenn zwei projectivische Strahlbüschel durch je drei Strahlen $m(a\ b\ c)$ und $m'(a'\ b'\ c')$ gegeben sind, zu einem vierten gegebenen Strahl md des ersteren, den entsprechenden $m'd'$ in dem letzteren zu construiren.

Auflösung. Man bezeichne mit α, β, γ die Durchschnitte der entsprechenden Strahlenpaare $(ma, m'a')$, $(mb, m'b')$, $(mc, m'c')$, und denke durch die Puncte $mm'\alpha\beta\gamma$ einen Kegelschnitt gelegt. Construirt man dann nach [89] den Punct δ, in welchem die Gerade md diesen Kegelschnitt trifft, so ist $m'\delta$ der gesuchte Strahl $m'd'$. — Aus [86]. (Andere Constructionen S. *Schröter*. Steiner's Vorlesungen §. 10.)

92. Aufgabe. Wenn ein Kegelschnitt durch fünf Puncte 1, 2, 3, 4, 5 gegeben ist, die Durchschnitte desselben mit einer beliebigen Geraden A, welche durch keinen jener fünf Puncte hindurch geht, zu construiren.

Auflösung. Man betrachte zwei jener fünf Puncte z. B. 1 und 5 als Mittelpuncte zweier Strahlbüschel, und schneide mit den Strahlen 1(2 3 4) und 5(2 3 4) die Gerade A resp. in abc und $a'b'c'$, so sind dies entsprechende Puncte zweier auf A liegender projectivischer Punctreihen [86, 65]. Construirt man nach [73] die Doppelpuncte e, f der letzteren, so erhält man die verlangten Durchschnitte. — Denn alsdann sind $1e$ und $5e$ entsprechende Strahlen, und daher [85] liegt e auf dem Kegelschnitte; ebenso bei f.

93. Bei drei unter einander projectivischen Strahlbüscheln [1], [2], [3] giebt es drei Puncte von der Art, dass durch einen und denselben drei entsprechende Strahlen der drei Büschel gehen.

Beweis. Der geometrische Ort der Durchschnitte entsprechender Strahlen von [1] und [2] ist ein Kegelschnitt K_3, der durch 1 und 2 geht [85], sodass für jeden Punct x desselben $1x$ und $2x$ entsprechende Strahlen sind. Ebenso ist der geometrische Ort der Durchschnitte entsprechender Strahlen von [1] und [3] ein Kegelschnitt K_2, der durch 1 und 3 geht, der Art dass für jeden Punct x desselben die Strahlen $1x$ und $3x$ einander entsprechen. Ist also x ein Durchschnitt der Kegelschnitte K_3 und K_2, so entsprechen einander alle drei Strahlen $1x$, $2x$, $3x$, und x ist einer der gesuchten Puncte. Eine Ausnahme tritt hier aber ein, wenn x auf 1 fällt, denn dann entspricht den Strahlen 21 und 31 nicht der nämliche Strahl in [1], sondern dem ersteren die Tangente an K_3 nnd dem letzteren die an K_2, also sind 21 und 31 nicht entsprechende

Strahlen. Die gesuchten Puncte sind demnach die drei Puncte $x\,y\,z$, welche die Kegelschnitte K_3 und K_2 ausser 1 mit einander gemein haben. Diese Puncte müssen übrigens auch auf dem Kegelschnitt K_1 liegen, welcher den geometrischen Ort der Durchschnitte entsprechender Strahlen der Büschel [2] und [3] bildet, und daher durch 2 und 3 geht. Da dieser Kegelschnitt durch die Puncte 2, 3, x, y, z schon vollständig bestimmt ist, so geht er im Allgemeinen nicht durch 1.

§. 3.

94. Legt man durch einen beliebigen Punct x eine Transversale, welche einen Kegelschnitt in z' und z'' schneidet, und bestimmt den zu x in Bezug auf z', z'' zugeordneten harmonischen Punct y, so heisst dieser ein zu x in Bezug auf den Kegelschnitt conjugirter Pol. Natürlich ist dann auch x conjugirter Pol zu y.

95. Ein Punct x hat in Bezug auf einen Kegelschnitt $u = 0$ unendlich viele conjugirte Pole, nämlich auf jeder durch x gehenden Transversale einen. Alle diese aber liegen auf einer Geraden, welche die Polare von x bezüglich des Kegelschnittes heisst, und deren Gleichung bei veränderlichen y_i ist:

$$\varDelta_y(u_x) = y_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + y_3 \frac{\partial u}{\partial x_3} = 0.$$

Der Punct x heisst dann der Pol dieser Geraden.

Beweis. Sind x, y zwei beliebige Puncte, und z ein auf ihrer Verbindungslinie liegender Punct, so kann man [19] die Coordinaten des letzteren setzen:

$$z_i = x_i + \lambda y_i.$$

Liegt aber z auf dem Kegelschnitte $u = 0$, so ist

$$u(x_1 + \lambda y_1,\ x_2 + \lambda y_2,\ x_3 + \lambda y_3) = 0.$$

Entwickelt man diesen Ausdruck nach Potenzen von λ, so erhält man nach [4]

$$(1) \qquad u_x + \lambda \varDelta_y(u_x) + \frac{\lambda^2}{2} \varDelta_y{}^2(u_x) = 0,$$

und dann gehören die beiden Wurzeln λ dieser Gleichung den beiden Durchschnitten z', z'' der Geraden $x\,y$ mit dem Kegelschnitte zu. Sind nun aber $x\,y$ und $z'\,z''$ zwei Paare zuge-

ordneter harmonischer Puncte, so müssen [25] die den Puncten z', z'' zugehörigen Werthe von λ gleich und entgegensetzt sein. Folglich muss

$$\Delta_y (u_x) = 0$$

sein. Dreht man nun die Gerade xy um den Punct x, so dass y veränderlich wird, so müssen seine Coordinaten dabei der vorigen Gleichung genügen, und daher beschreibt der Punct y eine Gerade.

Zusatz. Hieraus folgt: Besteht der Kegelschnitt aus zwei Geraden, ma und mb, welche sich in m schneiden, so ist die Polare eines Puncts x in Bezug auf dieses Geradenpaar der zu mx zugeordnete harmonische Strahl in Beziehung auf ma und mb.

96. Die Polare eines Puncts x bezüglich eines Kegelschnitts geht durch die Berührungspuncte der aus x an den Kegelschnitt gehenden Tangenten. — Denn fallen z', z'' in einen Punct zusammen, so fällt auch y in diesen Punct.

97. Ist $a_1 y_1 + a_2 y_2 + a_3 y_3 = 0$ die Gleichung einer beliebigen Geraden, so findet man die Coordinaten x_i ihres Pols bezüglich eines Kegelschnittes $u = 0$ durch Auflösung der Gleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} : \frac{\partial u}{\partial x_2} : \frac{\partial u}{\partial x_3} = a_1 : a_2 : a_3.$$

Denn die Polare des Pols x hat nach [95] die Gleichung

$$\Delta_y (u_x) = y_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + y_3 \frac{\partial u}{\partial x_3} = 0;$$

soll also x der Pol der gegebenen Geraden, oder diese die Polare von x sein, so ist dazu nothwendig und hinreichend, dass die Coefficienten der letzten Gleichung denen der gegebenen proportional sind.

98. Liegt ein Punct x auf dem Kegelschnitte $u = 0$, so so ist bei veränderlichen y_i

$$\Delta_y (u_x) = 0$$

die Gleichung der Tangente an dem Kegelschnitte im Puncte x.

Beweis. In diesem Falle ist in der Gleichung (1) in [95] $u_x = 0$, und wenn ausserdem die Gerade xy den Kegelschnitt berührt, so fallen die Durchschnitte z', z'' beide in x.

hinein, sodass die Gleichung (1) dann zwei gleiche Wurzeln $\lambda = 0$ hat. Damit dies eintrete, muss $\varDelta_y(u_x) = 0$ sein, und da diese Gleichung den geometrischen Ort der Puncte y angiebt, für welche die Gerade xy den Kegelschnitt berührt, so ist sie die Gleichung der Tangente.

99. Hieraus folgt unmittelbar: Die Polare bezüglich eines Kegelschnittes von einem Punctes x, welcher auf dem Kegelschnitte selbst liegt, ist die Tangente an dem Kegelschnitte in dem Puncte x.

100. Liegt ein Punct b auf der Polare eines Punctes a, so geht die Polare von b durch a hindurch.

Beweis. Die Polaren der Puncte a und b sind [95] resp.

$$\varDelta_y(u_a) = 0 \qquad \varDelta_y(u_b) = 0.$$

Liegt nun b auf der ersteren Polare, so ist $\varDelta_b(u_a) = 0$. Da aber diese Gleichung (nach [5] für $n = 2$) sich auch schreiben lässt: $\varDelta_a(u_b) = 0$, so wird der Gleichung der Polare von b genügt, wenn man a statt y setzt.

101. Man hat daher zusammenfassend: Die Verbindungsgerade zweier zu demselben Puncte conjugirter Pole ist die Polare dieses letzteren Punctes. Der Durchschnitt der Polaren zweier Puncte ist der Pol der Verbindungsgeraden jener Puncte. Die Polaren aller Puncte, welche auf einer Geraden G liegen, bilden einen Strahlbüschel, dessen Mittelpunct m der Pol von G ist. Alle Puncte einer Polare G sind conjugirte Pole zu dem Pol m dieser Geraden.

§. 4.

102. Die Gleichung

$$(1) \qquad a_1 x_2 x_3 + a_2 x_3 x_1 + a_3 x_1 x_2 = 0$$

stellt einen Kegelschnitt dar, welcher durch die Ecken des Fundamentaldreieckes geht, und umgekehrt hat die Gleichung jedes diesem Dreiecke umschriebenen Kegelschnittes die obige Form. Die Tangenten in den Ecken des Dreiecks schneiden die gegenüberliegenden Seiten in drei Puncten, welche in einer Geraden liegen; und deren Gleichung ist:

$$(2) \qquad \frac{x_1}{a_1} + \frac{x_2}{a_2} + \frac{x_3}{a_3} = 0.$$

Beweis. Die Gleichung (1) wird erfüllt, sobald zwei Coordinaten gleichzeitig Null sind; daher geht der Kegelschnitt durch die Ecken des Fundamentaldreiecks; und umgekehrt: wenn dies der Fall ist, wenn also der Gleichung des Kegelschnitts durch das gleichzeitige Verschwinden je zweier Coordinaten genügt werden soll, so kann sie die Quadrate der Coordinaten nicht enthalten. Die Tangente in irgend einem Puncte y hat nach [98] die Gleichung

$$y_1(a_2x_3+a_3x_2)+y_2(a_3x_1+a_1x_3)+y_3(a_1x_2+a_2x_1)=0.$$

Mithin sind die Tangenten in den Ecken des Dreiecks

$$\frac{x_2}{a_2}+\frac{x_3}{a_3}=0, \quad \frac{x_3}{a_3}+\frac{x_1}{a_1}=0, \quad \frac{x_1}{a_1}+\frac{x_2}{a_2}=0;$$

diese aber schneiden die gegenüberliegenden Seiten in den nämlichen Puncten, wie die Gerade (2).

103. Die Gleichung

$$\sqrt{a_1x_1}+\sqrt{a_2x_2}+\sqrt{a_3x_3}=0,$$

oder rational gemacht

$$(1) \qquad a_1^2x_1^2+a_2^2x_2^2+a_3^2x_3^2-2a_2a_3x_2x_3 \\ -2a_3a_1x_3x_1-2a_1a_2x_1x_2=0$$

stellt einen Kegelschnitt dar, welcher die Seiten des Fundamentaldreiecks berührt; und umgekehrt: jeder solche Kegelschnitt kann durch eine Gleichung von obiger Form dargestellt werden. Die Coefficienten a_1, a_2, a_3 haben die Eigenschaft, dass die Gerade

$$(2) \qquad a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=0$$

die Seiten des Fundamentaldreiecks in denjenigen Puncten schneidet, welche den Berührungspuncten in Beziehung auf die Ecken des Dreiecks harmonisch zugeordnet sind.

Beweis. Setzt man in (1) z. B. $x_3=0$, so erhält man $(a_1x_1-a_2x_2)^2=0$; d. h. die Gerade $x_3=0$ schneidet den Kegelschnitt in zwei zusammenfallenden Puncten, nämlich da, wo dieser von zwei mit

$$a_1x_1-a_2x_2=0$$

zusammenfallenden Geraden getroffen wird. Die Seite $x_3=0$ berührt also den Kegelschnitt, und die vorige Gerade ver-

bindet den Berührungspunct mit der Ecke *III*. Für den Durchschnitt der Geraden (2) mit $x_3 = 0$ aber erhält man

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 = 0,$$

und diese Gerade verbindet diesen Durchschnitt mit der Ecke *III*. Da nun nach [59]

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad a_1 x_1 + a_2 x_2 = 0, \quad a_1 x_1 - a_2 x_2 = 0$$

vier harmonische Strahlen sind, so sind deren Durchschnitte mit $x_3 = 0$ vier harmonische Puncte. — Wenn ein Kegelschnitt nicht eine Gleichung von der Form (1) hat, so kann er nicht alle Seiten des Fundamentaldreiecks berühren, da man dann nicht für $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ und $x_3 = 0$ jedesmal ein vollständiges Quadrat erhalten würde.

104. Berührt ein Kegelschnitt die Seiten eines Dreiecks, so schneiden sich die Geraden, welche die Berührungspuncte mit den gegenüberliegenden Ecken verbinden, in einem Puncte. — Denn nimmt man das Dreieck als Fundamentaldreieck an und stellt den Kegelschnitt durch die Gleichung (1) in [103] dar, so haben jene Geraden die Gleichungen

$$a_1 x_1 - a_2 x_2 = 0, \qquad a_2 x_2 - a_3 x_3 = 0, \qquad a_3 x_3 - a_1 x_1 = 0,$$

deren Summe identisch Null ist.

§. 5.

105. Das System der Kegelschnitte, welche durch die nämlichen vier Puncte hindurchgehen, heisst ein Kegelschnittbüschel, und die vier gemeinsamen Puncte die Basispuncte des Büschels. Bezeichnen $u = 0$ und $v = 0$ irgend zwei Kegelschnitte desselben, so lassen sich alle übrigen durch die Gleichung

$$u + \lambda v = 0$$

darstellen, wenn dem λ andere und andere Werthe zuertheilt werden. Denn diese Gleichung stellt einen Kegelschnitt dar, welcher durch die Puncte geht, in denen $u=0$ und $v=0$ sich schneiden. Will man aber einen bestimmten Kegelschnitt des Büschels fixiren, so hat man nur nöthig, ausser den vier Basispuncten noch irgend einen fünften Punct e anzunehmen, durch welchen dieser Kegelschnitt hindurch gehen soll. Bezeichnen dann u', v' die Werthe, welche die Functionen u, v

in dem Puncte e annehmen, so hat man für diesen $u' + \lambda v' = 0$ und daraus $\lambda = -\frac{u'}{v'}$. Demnach kann λ auch stets so bestimmt werden, dass $u + \lambda v = 0$ einen bestimmten Kegelschnitt des Büschels darstellt. Durch jeden Punct der Ebene geht daher nur ein solcher Kegelschnitt.

106. Sind a, b, c, d die Basispuncte eines Kegelschnittbüschels, und p der Durchschnitt zweier gegenüberliegender Seiten des vollständigen Vierecks $abcd$, z. B. ab und cd, so ist die Polare von p in Bezug auf alle Kegelschnitte des Büschels die nämliche Gerade, nämlich die Verbindungslinie der Durchschnitte der beiden anderen Paare gegenüberliegender Seiten (ac, bd) und (ad, bc).

Beweis. Diese Verbindungslinie schneidet die Geraden pab und pcd in zwei Puncten, welche harmonisch zugeordnet sind zu p in Beziehung auf resp. ab und cd. (S. u. a. *Schröter*. Steiner's Vorlesungen über synthetische Geometrie §. 9.) Da nun die Geraden pab und pcd für alle Kegelschnitte des Büschels Secanten sind, so ist [95] jene Verbindungslinie die Polare von p in Beziehung auf jeden Kegelschnitt des Büschels.

107. Hieraus folgt: Sind p, q, r die drei Diagonalpuncte des vollständigen Vierecks $abcd$, so ist in dem Dreiecke pqr jede Seite die Polare der gegenüberliegenden Ecke in Beziehung auf alle Kegelschnitte des Büschels, welcher $abcd$ zu Basispuncten hat.

108. Ein Dreieck, bei welchem in Beziehung auf einen Kegelschnitt jede Seite die Polare der gegenüberliegenden Ecke ist, heisst diesem Kegelschnitte conjugirt. — Demnach ist das Dreieck pqr, welches dem aus den vier Basispuncten $abcd$ eines Kegelschnittbüschels gebildeten vollständigen Viereck als Diagonaldreieck angehört, allen Kegelschnitten dieses Büschels conjugirt.

109. Die Form, welche die Gleichung eines Kegelschnittes erhält, wenn man ein ihm conjugirtes Dreieck zum Fundamentaldreieck annimmt, ist

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 = 0.$$

Beweis. Die Polare eines Puncts x in Beziehung auf einen Kegelschnitt $u = 0$ hat nach [95] die Gleichung

$$y_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + y_3 \frac{\partial u}{\partial x_3} = 0.$$

Soll nun zuerst die Seite $y_3 = 0$ die Polare der Ecke *III* ($x_1 = 0$, $x_2 = 0$) sein, so muss sich diese Gleichung für $x_1 = 0$ und $x_2 = 0$ auf $y_3 = 0$ reduciren, es müssen also $\frac{\partial u}{\partial x_1}$ und $\frac{\partial u}{\partial x_2}$ für diese Werthe verschwinden, und da es lineare Functionen sind, frei von x_3 sein. Ist nun im Allgemeinen

$$u = a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + a_{33} x_3^2 + 2 a_{23} x_2 x_3 + 2 a_{31} x_3 x_1 + 2 a_{12} x_1 x_2,$$
$$(a_{\varkappa\lambda} = a_{\lambda\varkappa})$$

so ist

$$\tfrac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial x_1} = a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3$$
$$\tfrac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial x_2} = a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3$$
$$\tfrac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial x_3} = a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3.$$

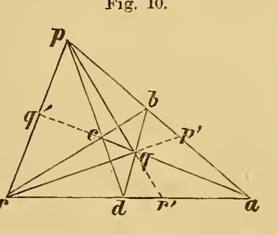
Es muss daher zuerst $a_{13} = a_{23} = 0$ sein, und dadurch geht die Gleichung der Polare über in

$$y_1 (a_{11} x_1 + a_{12} x_2) + y_2 (a_{21} x_1 + a_{22} x_2) + y_3 a_{33} x_3 = 0.$$

Da nun aber diese Gleichung ferner für $x_2 = 0$ und $x_3 = 0$ sich auf $y_1 = 0$ reduciren soll, so muss auch $a_{12} = 0$ sein.

110. Alle Kegelschnitte, welche durch einen Punct *a* gehen und demselben Dreiecke *pqr* conjugirt sind, bilden einen Kegelschnittbüschel und haben ausser *a* diejenigen Puncte *b*, *c*, *d* zu Basispuncten, welche mit *a* zusammen das vollständige Viereck bilden, von welchem *p*, *q*, *r* die Diagonalpuncte sind. (Fig. 10.)

Fig. 10.



B e w e i s. Durch eine Ecke *a* ist das Viereck *abcd* bestimmt. Construirt man es nach [83] und schneidet die Seiten des Dreiecks *qr*, *rp*, *pq* mit den Geraden *ap*, *aq*, *ar* resp. in *p'*, *q'*, *r'*, so erhält man vermöge der Construction des Vierecks zugeordnete Paare harmonischer Puncte; z. B. auf *ap* sind *pp'* und *ab* zwei solche Paare. Demnach gehen alle durch *a* gelegten Kegelschnitte, für welche *qr* die Polare von *p* ist, nach [95] auch durch *b*. Und ebenso verhält es sich auch bei den anderen Puncten.

111. Die Polaren eines beliebigen Punctes p (der nicht die in [106] betrachtete Lage hat) in Beziehung auf sämmtliche Kegelschnitte eines Büschels schneiden sich in einem und demselben Puncte q. Dieser ist dann [101] ein zu p conjugirter Pol in Bezug auf jeden Kegelschnitt des Büschels und heisst daher der zu p in Beziehung auf den Kegelschnittbüschel conjugirte Pol. Natürlich ist dann auch p der zu q conjugirte Pol in Beziehung auf denselben Büschel.

Beweis. Stellt man nach [105] irgend einen Kegelschnitt des Büschels durch die Gleichung $u + \lambda v = 0$ dar, so erhält man [95] für die Polare von p in Beziehung auf diesen Kegelschnitt die Gleichung

$$\varDelta_x(u_p) + \lambda \varDelta_x(v_p) = 0.$$

Für verschiedene Werthe von λ aber schneiden sich [56] alle diese Geraden in einem und demselben Puncte.

112. Zieht man in den vier Basispuncten eines Kegelschnittbüschels die Tangenten an sämmtliche Kegelschnitte, so bilden diese Tangenten vier unter sich projectivische Strahlbüschel, indem diejenigen Tangenten, welche den nämlichen Kegelschnitt berühren, entsprechende Strahlen sind.

Beweis. Sind a, b, c, d die Basispuncte eines Kegelschnittbüschels $u + \lambda v = 0$ [105], so erhält man nach [98] für den Tangentenbüschel in a die Gleichung

$$\varDelta_x(u_a) + \lambda \varDelta_x(v_a) = 0$$

und daraus die drei anderen Tangentenbüschel, wenn man b, c, d an Stelle von a setzt. Daher [61] sind diese vier Strahlbüschel projectivisch, und diejenigen Strahlen entsprechende, welche gleichen Werthen von λ angehören, also den nämlichen Kegelschnitt berühren.

113. Wenn ein Strahlbüschel und ein Kegelschnittbüschel durch Gleichungen von der Form $A + \lambda B = 0$ und $u + \lambda v = 0$ dargestellt sind, so heissen dieselben projectivisch in Ansehung derjenigen einander entsprechenden Strahlen und Kegelschnitte, welche gleichen Werthen von λ angehören. Dann folgt aus [112], dass die Tangentenbüschel in den vier Basispuncten ebenfalls dem Strahlbüschel projectivisch sind, und dass einem bestimmten Strahle des letzteren gleichzeitig ein Kegelschnitt und dessen Tangenten in den Basispuncten projectivisch entsprechen.

114. Die Polaren eines Punctes p in Bezug auf sämmtliche Kegelschnitte eines Büschels bilden einen Strahlbüschel, der zu dem Kegelschnittbüschel projectivisch ist. — Denn der von den Polaren in Bezug auf den Kegelschnittbüschel $u+\lambda v=0$ gebildete Strahlbüschel hat nach [111] die Gleichung

$$\varDelta_x(u_p) + \lambda \varDelta_x(v_p) = 0$$

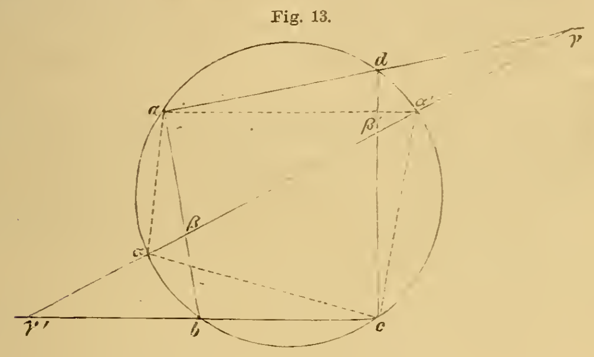
und ist daher nach [113] dem Kegelschnittbüschel $u + \lambda v = 0$ projectivisch.

§. 6.

115. Eine beliebige Transversale wird von den einzelnen Kegelschnitten eines Büschels in conjugirten Punctepaaren einer Involution geschnitten.

Beweis 1. Seien (Fig. 13) $abcd$ die Basispuncte des Kegelschnittbüschels, $\alpha\alpha'$ die Schnitte einer Transversale T

Fig. 13.



mit irgend einem Kegelschnitte des Büschels, ferner β, β' die Schnitte von T mit ab, cd, und $\gamma\gamma'$ die Schnitte von T mit ad, bc. Dann sind [86] folgende zwei Strahlbüschel projectivisch:

$$a(\alpha\; b\; \alpha'\; d) \;\overline{\wedge}\; c(\alpha\; b\; \alpha'\; d),$$

und daher [65] auch ihre Durchschnitte mit T, also ist [33]

$$(\alpha\; \beta\; \alpha'\; \gamma) = (\alpha\; \gamma'\; \alpha'\; \beta').$$

Aber nach [21] hat man

$$(\alpha\; \gamma'\; \alpha'\; \beta') = (\alpha'\; \beta'\; \alpha\; \gamma')$$

also ist auch

$$(\alpha\; \beta\; \alpha'\; \gamma) = (\alpha'\; \beta'\; \alpha\; \gamma').$$

Man hat demnach zwei aufeinanderliegende projectivische Punctreihen, in welchen $\beta\beta'$ und $\gamma\gamma'$ entsprechende Punctepaare sind, und ausserdem $\alpha\alpha'$ einander involutorisch entsprechen, folglich ist [42] $\alpha\alpha'$ ein conjugirtes Punctepaar der durch $\beta\beta'$ und $\gamma\gamma'$ bestimmten [43] Involution. (*Salmon.* Anal. Geom. der Kegelschnitte, deutsch von *Fiedler.* 2. Aufl. pag. 332.)

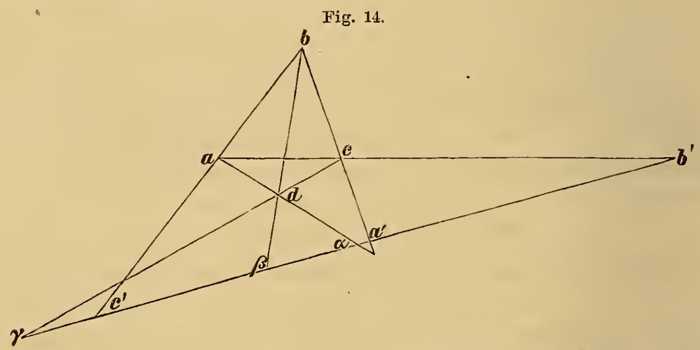
Beweis 2. Stellt man den Kegelschnittbüschel durch die Gleichung $u + \lambda v = 0$ dar und bezieht diese auf ein System von Parallelcoordinaten x, y, dessen x-Axe mit der Transversale zusammenfällt, so erhält man, wenn man $y = 0$ setzt, für die Abscissen der Durchschnitte der Transversale mit den Kegelschnitten des Büschels eine Gleichung von der Form

$$a_0 x^2 + a_1 x + a_2 + \lambda (b_0 x^2 + b_1 x + b_2) = 0.$$

Mithin bilden die Durchschnittspaare der Transversale mit den Kegelschnitten nach [49] conjugirte Paare einer Involution. — Dieser Beweis zeigt, dass der Satz auch dann noch gültig bleibt, wenn die Durchschnittspuncte imaginär werden, ja selbst dann noch, wenn sie sich auf imaginäre Kegelschnitte beziehen.

116. Eine beliebige Transversale schneidet die drei Paare gegenüberliegender Seiten eines vollständigen Vierecks $abcd$ in conjugirten Paaren einer Involution. — Aus [115], denn diese drei Geradenpaare sind drei Kegelschnitte eines Büschels mit den Basispuncten $abcd$.

Fig. 14.



117. Aufgabe. Wenn zwei Paare conjugirter Puncte einer Involution $a'\alpha$, $b'\beta$ gegeben sind, zu einem gegebenen Puncte c' den conjugirten γ zu construiren.

Auflösung 1. (Fig. 14.) Man ziehe durch a', b', c' drei

Gerade, welche sich nicht in einem Puncte schneiden, sondern ein Dreieck bilden, und bezeichne die Ecken desselben so mit a, b, c, dass bc, ca, ab resp. durch a', b', c' gehen; suche dann den Durchschnitt $(a\alpha, b\beta) = d$ und ziehe cd, so schneidet diese Gerade den Träger der Involution in dem gesuchten Puncte γ. — Denn $abcd$ sind dann die Ecken eines vollständigen Vierecks, dessen Seitenpaare in $a'\alpha, b'\beta, c'\gamma$ geschnitten werden. [116.]

Auflösung 2. S. [128.]

118. Unter den Kegelschnitten eines Büschels giebt es stets zwei (reelle oder imaginäre), welche eine beliebig gegebene Gerade G berühren; und die Berührungspuncte sind die Doppelpuncte der durch den Kegelschnittbüschel auf G erzeugten Involution [115]. (Dabei ist ein Geradenpaar das sich auf G schneidet, als ein diese Gerade berührender Kegelschnitt gerechnet.)

Beweis. Die durch den Kegelschnittbüschel auf G erzeugte Involution besitzt stets [38] zwei reelle oder imaginäre Doppelpuncte. In jedem derselben sind zwei conjugirte Puncte und daher auch die Durchschnitte von G mit einem Kegelschnitte vereinigt; daher berührt G in jedem Doppelpuncte einen Kegelschnitt.

119. Sind p und q zwei conjugirte Pole in Beziehung auf einen Kegelschnittbüschel [111], so sind diese zugleich die Puncte, in denen die Gerade pq von zweien Kegelschnitten des Büschels berührt wird und daher [118] auch die Doppelpuncte der durch den Büschel auf pq erzeugten Involution.

Beweis. Ist K der durch p gehende Kegelschnitt des Büschels, so ist pq die Tangente desselben in p; denn diese Tangente ist [99] die Polare von p in Bezug auf K und muss folglich [111] durch q gehen. Aus demselben Grunde ist pq auch in q die Tangente an demjenigen Kegelschnitte K' des Büschels, der durch q geht.

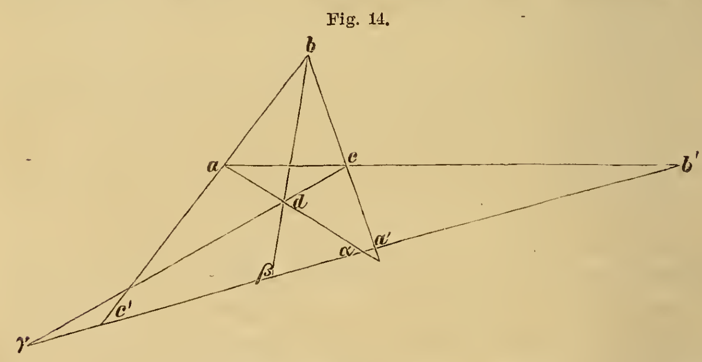
120. Schneidet man die Seiten bc, ca, ab (Fig. 14) eines Dreiecks durch eine Transversale T in den Puncten a', b', c' und bestimmt dann zu diesen die conjugirten Puncte α, β, γ irgend einer Involution, so schneiden sich die Verbindungsgeraden $a\alpha, b\beta, c\gamma$ in einem Puncte d.

Beweis. Man nehme auf der Transversale T die Puncte α, β beliebig an, so ist [43] durch die Paare $a'\alpha$, $b'\beta$ eine Involution bestimmt, also ist dann auch der zu c' conjugirte Punct γ vollständig bestimmt. Nun sei d der Durchschnitt der Geraden $a\alpha$, $b\beta$; dann bilden die Puncte $abcd$ ein vollständiges Viereck, dessen Seitenpaare von T in conjugirten Punctepaaren einer Involution geschnitten werden [116]. Zwei der Letzteren sind $a'\alpha$ und $b'\beta$, gebildet auf den Seitenpaaren (bc, ad) und (ac, bd). Das dritte Seitenpaar ist ab, cd, und da nun c' auf ab liegt, so muss der zu c' conjugirte Punct γ auf cd liegen, oder $c\gamma$ muss durch d gehen. (*Cremona.* Curve piane. art. 109.)

121. Sind aa', bb' irgend zwei Paare conjugirter Pole in Bezug auf einen Kegelschnitt K, so ist das nach [82] durch diese beiden Punctepaare bestimmte dritte Punctepaar cc' ebenfalls ein Paar conjugirter Pole in Bezug auf K. (*Hesse.* De curvis et superficiebus secundi ordinis. Crelle's Journ. Bd. 20. pag. 301.)

Beweis. Sei die Bezeichnung der Puncte cc' so gewählt, dass abc ein Dreieck bilden, und $a'b'c'$ in gerader Linie liegen [82] (Fig. 14). Auf dieser Geraden bestimme man zu jedem der Puncte a', b', c' den conjugirten Pol in Bezug auf

Fig. 14.



K. Seien diese der Reihe nach α, β, γ. Dann ist [94] jedes der drei Paare $a'\alpha$, $b'\beta$, $c'\gamma$ ein harmonisch zugeordnetes Paar in Bezug auf die Durchschnitte der Geraden $a'b'c'$ mit dem Kegelschnitte K, und folglich [45] sind diese sechs Puncte in Involution. Daher schneiden sich [120] die Geraden $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$ in einem Puncte d. Nun sind a und α beide conjugirte Pole zu a', also ist [101] $a\alpha$ die Polare von a' in Bezug auf K; ebenso

ist $b\beta$ die Polare von b', und daher der Durchschnitt d von $a\alpha$ und $b\beta$ der Pol von $a'b'$. Alle Puncte dieser Geraden sind demnach [101] conjugirte Pole zu d, also unter andern auch c' und γ. Aber die beiden letzteren sind selbst conjugirte Pole, demnach ist sowohl d als auch γ conjugirter Pol zu c', oder $d\gamma$ ist die Polare von c'; aber $d\gamma$ geht durch c, also ist auch c conjugirter Pol zu c' in Bezug auf K. (*Cremona*. Curve piane art. 109.)

§. 7.

122. Sind $abcd$ die Basispuncte eines Kegelschnittbüschels, und legt man durch zwei derselben z. B. ab einen festen Kegelschnitt S, so schneidet dieser die Kegelschnitte des Büschels in Punctepaaren $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\xi\xi'$, etc. Die Verbindungslinien dieser Paare, also die Linien $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\xi\xi'$, etc. laufen dann durch einen festen Punct der Geraden cd.

Beweis. Bezeichnet man die Geraden ab und cd resp. durch $A_{ab}=0$ und $A_{cd}=0$, und mit $K=0$ irgend einen Kegelschnitt des Büschels, so kann jeder Kegelschnitt $X=0$ des Büschels durch die Gleichung

$$X = K + \lambda A_{ab} A_{cd} = 0$$

dargestellt werden, wenn λ einen veränderlichen Parameter bedeutet. Bezeichnet man aber die beiden Durchschnitte (ausser a, b) der Kegelschnitte S und K durch α und α', und mit $A_{\alpha\alpha'}=0$ die Gerade $\alpha\alpha'$, so kann der Kegelschnitt S durch die Gleichung

$$S = K + \varkappa A_{ab} A_{\alpha\alpha'} = 0$$

dargestellt werden. Die Durchschnitte $ab\xi\xi'$ von X und S müssen daher der Gleichung

$$X - S = A_{ab}(\lambda A_{cd} - \varkappa A_{\alpha\alpha'}) = 0$$

genügen, d. h. auf den Geraden $A_{ab}=0$ und $\lambda A_{cd} - \varkappa A_{\alpha\alpha'}=0$ liegen. Die erstere verbindet die Puncte a, b, also die letztere die Puncte ξ, ξ'; aber diese geht für jeden Werth von λ durch den Punct, in welchem sich cd und $\alpha\alpha'$ schneiden. (*Salmon*. Anal. Geom. d. Kegelschn. deutsch von *Fiedler*. 2. Aufl. pag. 297.)

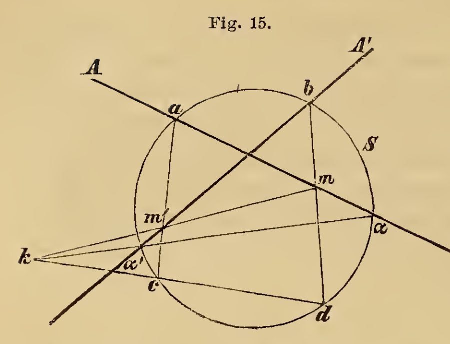


Fig. 15.

123. Lässt man an Stelle des Kegelschnitts S in [122] zwei resp. durch a und b gehende Geraden treten, so folgt: (Fig. 15). Legt man durch zwei Basispuncte a, b eines Kegelschnittbüschels $[abcd]$ je eine Transversale A und A', so schneidet jeder Kegelschnitt des Büschels jede dieser beiden Transversalen in einem Puncte: α und α'. Die Verbindungslinien $\alpha\alpha'$ je zweier solcher dem nämlichen Kegelschnitte angehöriger Puncte schneiden sich alle in demselben Puncte, bilden also einen Strahlbüschel, dessen Mittelpunct auf cd liegt. Die Kegelschnitte des Büschels erzeugen daher auf den Transversalen A und A' zwei projectivische und perspectivisch liegende Punctreihen. — Man findet den Mittelpunct k des Strahlbüschels am einfachsten, wenn man die Durchschnitte m und m' der Transversalen A und A' mit einem der beiden Geradenpaare (ac, bd) oder (ad, bc), als einem Kegelschnitt des Büschels, aufsucht und den Durchschnitt von mm' mit cd bestimmt. (*Cremona.* Curve piane art. 63.)

124. Aufgabe. (Fig. 16.) Wenn zwei Kegelschnitte durch je fünf Puncte $abc\alpha\beta$ und $abc\gamma'\delta'$, von welchen drei abc beiden gemeinschaftlich angehören, gegeben sind, ihren vierten Durchschnittspunct d zu construiren. (Dabei können auch zwei der gegebenen Puncte zusammenfallen, wenn dann nur ihre Verbindungslinie als Tangente des Kegelschnitts ebenfalls gegeben ist.)

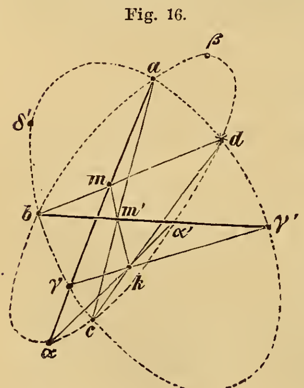


Fig. 16.

Auflösung 1. Man betrachte $a\alpha$ und $b\gamma'$ als zwei Transversalen A und A' und suche nach [89] den Punct γ, in welchem A den Kegelschnitt $abc\gamma'\delta'$ schneidet, so wie den Punct α', in welchem A' den anderen Kegelschnitt $abc\alpha\beta$ schneidet.

Dann sind $\alpha\alpha'$ und $\gamma\gamma'$ zwei Paare entsprechender Puncte der nach [123] auf den Transversalen A und A' erzeugten Punctreihen, und daher $k=(\alpha\alpha',\gamma\gamma')$ der Mittelpunct des zugehörigen Strahlbüschels. Nun liegt k auch auf cd, also muss d auf ck liegen; bezeichnet man ferner mit m und m' die Puncte, in welchen die Transversalen A und A' das Geradenpaar ac, bd schneiden, d. h. ist $m=(a\alpha,\ bd)$, $m'=(b\gamma',\ ac)$, so geht auch mm' durch k. Nachdem daher die Puncte α', γ und $k=(\alpha\alpha',\ \gamma\gamma')$ gefunden sind, ist die weitere Constructionsvorschrift folgende: Man bestimme $m'=(b\gamma',ac)$, $m=(a\alpha,\ m'k)$ und dann $d=(ck,\ bm)$. [Oder mit Benutzung des Geradenpaares ad, bc: Bestimme $n=(a\alpha,\ bc)$, $n'=(b\gamma',\ nk)$ und dann $d=(ck,\ an')$]. (*Cremona.* Curve piane. art. 64.)

Auflösung 2. S. [300.]

125. Seien $abcd$ die Basispuncte eines Kegelschnittbüschels. Legt man durch zwei derselben z. B. ab einen festen Kegelschnitt S, so schneidet dieser jeden Kegelschnitt des Büschels in einem Punctepaare $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, etc. Zieht man nun aus einem beliebigen Puncte o des Kegelschnitts S Strahlenpaare nach diesen Punctepaaren, so bilden diese Strahlenpaare conjugirte Paare einer Involution.

Beweis. Sei $\alpha\alpha'$ das Punctepaar, in welchem irgend ein Kegelschnitt K des Büschels den festen Kegelschnitt S schneidet. Da dann die Puncte $abcd\alpha\alpha'$ alle auf K liegen, so ist [86]

$$(1) \qquad a(cd\alpha\alpha') \ \overline{\wedge}\ b(cd\alpha\alpha').$$

Nun giebt es unter den Kegelschnitten des Büschels zwei Geradenpaare, die die Verbindungslinie der gewählten Puncte ab nicht enthalten, nämlich $(ac,\ bd)$ und $(ad,\ bc)$. Die Durchschnitte dieser mit S mögen durch $\lambda\lambda'$ und $\mu\mu'$ bezeichnet werden und zwar so, dass

ac durch λ, bd durch λ'
ad durch μ, bc durch μ'

hindurch gehe. Dann kann die Projectivität (1) geschrieben werden

$$a(\lambda\mu\alpha\alpha') \ \overline{\wedge}\ b(\mu'\lambda'\alpha\alpha').$$

Nun liegen aber die Puncte $ab\lambda\lambda'\mu\mu'\alpha\alpha'$ alle auf S, daher

kann man [86] die Mittelpuncte a, b nach irgend einem Puncte o dieses Kegelschnitts hinverlegen und erhält

$$o(\lambda\mu\alpha\alpha') \overline{\wedge} o(\mu'\lambda'\alpha\alpha').$$

Vertauscht man dann in dem letzteren Büschel die beiden ersten Strahlen mit einander und gleichzeitig auch die beiden letzten, so bleibt ihr Doppelverhältniss ungeändert [22], also folgt

$$o(\lambda\mu\alpha\alpha') \overline{\wedge} o(\lambda'\mu'\alpha'\alpha),$$

d. h. $o(\lambda\lambda')$, $o(\mu\mu')$, $o(\alpha\alpha')$ sind drei Paare einander entsprechender Strahlen, und bei dem letzten Paare ist das Entsprechen ein involutorisches [41], mithin ist [42] dieses ein conjugirtes Paar in der durch die beiden ersten bestimmten Involution.

Zusatz. Da eine Involution aus zwei concentrischen und involutorisch projectivischen Strahlbüscheln besteht, so ist das involutorische Entsprechen der Punctepaare $\lambda\lambda'$, $\mu\mu'$, $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, etc., die sämmtlich auf dem Kegelschnitte S liegen, von der Wahl des Mittelpuncts o gänzlich unabhängig. Man sagt daher, dass diese Punctepaare eine Involution auf dem Kegelschnitte bilden. Eine solche ist ebenfalls durch zwei Punctepaare vollständig bestimmt, in der Art dass mit Hülfe dieser beiden Paare zu jedem Puncte des Kegelschnitts der ihm conjugirte eindeutig bestimmt ist. Man kann dann den vorigen Satz auch so aussprechen: Ein durch zwei Basispuncte ab eines Kegelschnittbüschels beliebig gelegter Kegelschnitt S schneidet die Kegelschnitte des Büschels in conjugirten Punctepaaren einer auf S liegenden Involution.

126. Legt man durch den Mittelpunct o einer Strahleninvolution einen beliebigen Kegelschnitt S, der die conjugirten Strahlenpaare in den Punctepaaren $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$ etc. schneidet, so dass die letzteren eine Involution auf dem Kegelschnitte S bilden, so schneiden sich die Verbindungslinien $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$ etc. in einem und demselben Puncte p und bilden daher einen Strahlbüschel $[p]$.

Beweis. Nimmt man auf S zwei Puncte ab beliebig an und legt durch $ab\alpha\alpha'$ und $ab\beta\beta'$ je einen Kegelschnitt K und K', so treffen sich diese in zwei weitern Puncten c, d. Betrachtet man nun $abcd$ als Basispuncte eines Kegelschnitt-

büschels, von welchem K und K' zwei Kegelschnitte sind, so bilden die Durchschnittspaare von S mit den Kegelschnitten dieses Büschels nach [125] conjugirte Paare einer auf S liegenden Involution. Zwei dieser Paare sind $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, und durch diese ist die Involution vollkommen bestimmt. Mithin muss der durch irgend einen auf S liegenden Punct γ gehende Kegelschnitt des Büschels $[abcd]$ den Kegelschnitt S in dem zu γ conjugirten Puncte γ' treffen. Demnach bilden die Punctepaare $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$, etc. zugleich die Durchschnittspaare eines Kegelschnittbüschels mit dem Kegelschnitte S, der durch zwei Basispuncte des Büschels geht, und folglich [122] treffen sich die Geraden $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$, etc. in dem nämlichen Puncte.

127. Der im vorigen Artikel entstandene und aus den Geraden $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$, etc. bestehende Strahlbüschel $[p]$ ist mit der Strahleninvolution $[o]$ projectivisch, in der Art, dass z. B. dem Strahle $\alpha\alpha'$ das Strahlenpaar $o(\alpha\alpha')$ entspricht.

Beweis 1. Nimmt man o zum Anfangspuncte eines Parallel-Coordinatensystems, in welchem die Coordinaten mit ξ und η bezeichnet werden, so kann man die Strahleninvolution (zweiten Grades) nach [76] durch eine Gleichung von der Form

$$(1) \quad a_0\eta^2 + a_1\eta\xi + a_2\xi^2 + \lambda(b_0\eta^2 + b_1\eta\xi + b_2\xi^2) = 0$$

darstellen. Löst man diese Gleichung nach $\frac{\eta}{\xi}$ auf und bezeichnet ihre beiden Wurzeln mit k_1 und k_2, so werden die irgend einem Werthe von λ zugehörigen und daher conjugirten Strahlen der Involution $o(\alpha, \alpha')$ durch die Gleichungen

$$L_1 = \eta - k_1\xi = 0 \qquad L_2 = \eta - k_2\xi = 0$$

dargestellt. Der Kegelschnitt S, welcher durch den Anfangspunct o geht, habe die Gleichung

$$S = a\eta^2 + b\eta\xi + c\xi^2 + d\eta + e\xi = 0.$$

Bezeichnet man aber mit

$$F = f\eta + g\xi + h = 0$$

die Gleichung der Geraden $\alpha\alpha'$, so ist der Kegelschnitt S dem

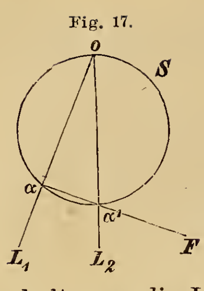


Fig. 17.

von den drei Geraden $L_1 L_2 F$ gebildeten Dreiecke umschrieben (Fig. 17) und kann daher nach [102] auch in der Form

$$S = l L_1 L_2 + m L_1 F + n L_2 F = 0$$

dargestellt werden. Daraus folgt, dass

$$(m L_1 + n L_2) F \equiv S - l L_1 L_2$$

sein muss. Substituirt man darin die Ausdrücke von L_1, L_2, S, F durch ξ und η, so erhält man die Identität

$$[(m+n)\eta - (mk_1 + nk_2)\xi]\,[f\eta + g\xi + h] \equiv a\eta^2 + b\eta\xi + c\xi^2 + d\eta + e\xi - l(\eta^2 - (k_1+k_2)\eta\xi + k_1 k_2 \xi^2)$$

und daraus für die Coefficienten die Beziehungen

$$(m+n)f = a - l$$
$$(m+n)g - (mk_1 + nk_2)f = b + l(k_1 + k_2)$$
$$-(mk_1 + nk_2)g = c - lk_1 k_2$$
$$(m+n)h = d$$
$$-(mk_1 + nk_2)h = e.$$

Eliminirt man mit Hülfe der beiden letzten Gleichungen zunächst m und n und setzt zur Abkürzung

$$k_1 + k_2 = s \qquad k_1 k_2 = p,$$

so geben die drei ersten Gleichungen

$$df = h(a - l)$$
$$dg + ef = h(b + ls)$$
$$eg = h(c - lp),$$

und eliminirt man aus diesen l, so erhält man zur Bestimmung der Verhältnisse von f, g, h die Gleichungen

$$(e + ds)f + dg - (b + as)h = 0$$
$$dpf - eg + (c - ap)h = 0$$

und aus diesen

$$f : g : h = (cd - eb - ad \,.\, p - ae \,.\, s) : (-ce + (ae - bd)p - cd \,.\, s) : (-e^2 - d^2 \,.\, p - de \,.\, s).$$

Die Coefficienten der Gleichung der Geraden F stellen sich also dar als lineare Functionen von s und p, ausgedrückt durch

die Coefficienten der Kegelschnittsgleichung $S=0$. Nun ergiebt sich aber aus (1)

$$s=-\frac{a_1+\lambda b_1}{a_0+\lambda b_0} \qquad p=\frac{a_2+\lambda b_2}{a_0+\lambda b_0};$$

durch Substitution dieser Ausdrücke werden dann f, g, h proportional mit linearen Functionen von λ, welche von den Coefficienten der Kegelschnittsgleichung $S=0$ und denen der Involutionsgleichung (1) abhängen. Bezeichnet man diese linearen Functionen dadurch, dass man setzt:

$$f:g:h=f'+f''\lambda : g'+g''\lambda : h'+h''\lambda,$$

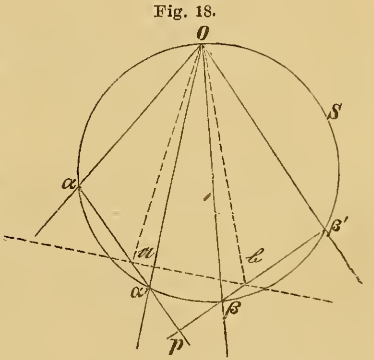
so wird die Gleichung der Geraden F oder $\alpha\alpha'$

$$F=f'\eta+g'\xi+h'+\lambda(f''\eta+g''\xi+h'')=0.$$

Dadurch bestätigt sich zunächst, dass alle diese Geraden F, also $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$, etc. sich in einem Puncte schneiden, sodann aber ergiebt sich, dass eine Gerade $\alpha\alpha'$ und das ihm zugehörige Strahlenpaar $o(\alpha\alpha')$ der Involution demselben Werthe von λ angehören, und dass sie daher einander projectivisch entsprechen [76].

Beweis 2. (Fig. 18.) Man kann die Strahlenpaare der Involution $[o]$ als Kegelschnitte eines Büschels ansehen, dessen vier Basispuncte in o zusammenfallen; alsdann bilden die Polaren des Punctes p in Bezug auf diese Geradenpaare nach [114] einen mit diesem Kegelschnittbüschel projectivischen Strahlbüschel, der natürlich seinen Scheitel in o hat. Nun gehen aber die Polaren von p in Bezug auf die Geradenpaare $o(\alpha\alpha')$, $o(\beta\beta')$ etc. durch die Puncte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ etc., welche zu p harmonisch zugeordnet sind in Bezug auf $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, etc. [95], und da die Punctepaare $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, etc. die Durchschnitte des Kegelschnittes S mit Transversalen bilden, die durch p gehen, so liegen die Puncte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, etc. auf der Polare von p in Beziehung auf S [95]. Mithin liegen die Strahlbüschel $o(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \ldots)$ und $p(\alpha\alpha', \beta\beta', \ldots)$ perspectivisch und sind da-

Fig. 18.



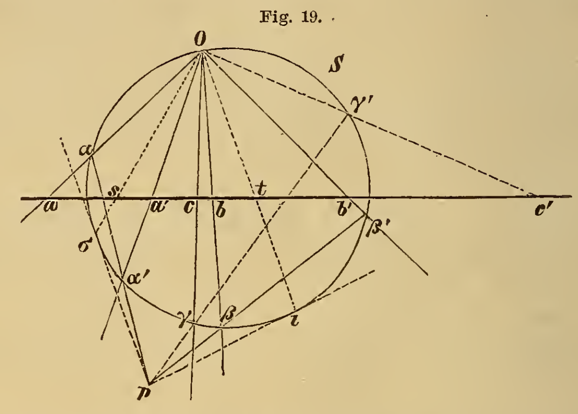
her projectivisch, und folglich ist der letztere Strahlbüschel [p] auch projectivisch zu der Involution in o.

Anmerkung. Man bemerke, dass es nicht gestattet sein würde, den Satz [114] anzuwenden auf beliebige Strahlenpaare, die sich alle in demselben Puncte treffen, wohl aber auf solche, die eine Involution bilden, denn diese können durch eine Gleichung von der Form (1) dargestellt werden, und daher bleibt dann die Schlussweise von [114] gültig.

128. Aus [126] ergiebt sich eine zweite Auflösung der Aufgabe [117]: Wenn eine Punct- oder Strahleninvolution durch zwei conjugirte Paare gegeben ist, zu einem gegebenen Puncte oder Strahle den conjugirten zu construiren. (Fig. 19.)

Auflösung. Durch den Scheitel o der Strahleninvolution,

Fig. 19.



(die entweder unmittelbar gegeben ist, oder die man bei gegebener Punctinvolution erhält, wenn man nach den Puncten derselben aus einem beliebigen Puncte o Strahlen zieht) lege man einen beliebigen Kegelschnitt S (am einfachsten einen Kreis), schneide diesen mit den gegebenen Strahlenpaaren in $\alpha\alpha'$ und $\beta\beta'$, und mit dem Strahle, dessen conjugirter gefunden werden soll, in γ. Bestimmt man dann den Durchschnitt $(\alpha\alpha', \beta\beta') = p$, und schneidet S mit $p\gamma$ in γ', so ist $o\gamma'$ der verlangte Strahl, welcher bei gegebener Punctinvolution natürlich auch den gesuchten Punct liefert.

Zusatz. Zieht man aus p die Tangenten an den Kreis S, so sind die nach den Berührungspuncten σ und τ gehenden Strahlen $o\sigma$ und $o\tau$ zugleich die Doppelstrahlen der Involution.

§. 8.

129. Aufgabe. Wenn vier Strahlen eines Strahlbüschels $m'(a'b'c'd')$ und vier Puncte $a\ b\ c\ d$ gegeben sind, so soll der geometrische Ort der Puncte x bestimmt werden, so dass die von x nach $a\ b\ c\ d$ gehenden Strahlen den gegebenen $m'(a'b'c'd')$ der Reihe nach projectivisch entsprechen.

Auflösung. Man betrachte a als Mittelpunct eines Strahlbüschels $a(b, c, d)$, der mit $m'(b', c', d')$ projectivisch ist, und construire in dem ersteren nach [91] den Strahl $a\,t$, welcher dem Strahl $m'\,a'$ in Letzterem entspricht, sodass

$$a\,(t, b, c, d)\ \overline{\wedge}\ m'\,(a', b', c', d').$$

Ist dann x irgend ein Punct des Kegelschnittes K, welcher durch $a\ b\ c\ d$ geht und $a\,t$ in a berührt, so ist [86]

$$x\,(a, b, c, d)\ \overline{\wedge}\ a\,(t, b, c, d),$$

und daher auch

$$x\,(a, b, c, d)\ \overline{\wedge}\ m'\,(a', b', c', d').$$

Der Kegelschnitt K ist also der gesuchte geometrische Ort. (*Cremona* art. 62.)

130. Aufgabe. Wenn fünf Strahlen $m'\,(a', b', c', d', e')$ und fünf Puncte a, b, c, d, e gegeben sind, so soll der Mittelpunct m des Strahlbüschels gefunden werden, dessen nach den gegebenen Puncten gerichtete Strahlen $m\,(a, b, c, d, e)$ den gegebenen $m'\,(a', b', c', d', e')$ der Reihe nach projectivisch entsprechen.

Auflösung. Construirt man nach [91] einen Strahl $a\,t$ so, dass

$$a\,(t, b, c, d)\ \overline{\wedge}\ m'\,(a', b', c', d')$$

ist, so ist der geometrische Ort der Puncte x, welche die Forderung erfüllen, dass

$$x\,(a, b, c, d)\ \overline{\wedge}\ m'\,(a', b', c', d')$$

sei, nach [129] ein Kegelschnitt K, welcher durch $a\ b\ c\ d$ geht und $a\,t$ in a berührt. Construirt man nun ferner einen Strahl $a\,s$ so, dass

$$a\,(s, b, c, e)\ \overline{\wedge}\ m'\,(a', b', c', e')$$

ist, so ist der geometrische Ort der Puncte x, für welche

$$x\,(a, b, c, e)\ \overline{\wedge}\ m'\,(a', b', c', e')$$

ist, ein zweiter Kegelschnitt K', welcher durch $a\,b\,c\,e$ geht und as in a berührt. Der gesuchte Punct m ist demnach der vierte Durchschnittspunct der beiden Kegelschnitte K, K', welche beide durch $a\,b\,c$ gehen, und von denen der erste durch die Puncte $a\,b\,c\,d$ und die Tangente at in a, und der zweite durch die Puncte $a\,b\,c\,e$ und die Tangente as in a bestimmt ist. Dieser Durchschnittspunct kann nach [124] construirt werden. (*Cremona* art. 62.)

§. 9.

131. Die Gleichung eines Kegelschnittes, welcher zwei Geraden $A = 0$ und $B = 0$ in den Puncten berührt, in welchen diese von einer dritten Geraden $D = 0$ getroffen werden, kann in der Form

$$AB = k^2 D^2$$

geschrieben werden, worin k eine Constante bedeutet*); und diese Gleichung stellt bei veränderlichem k den Kegelschnittbüschel dar, welcher A und B zu gemeinschaftlichen Tangenten, und D zur gemeinschaftlichen Berührungssehne hat. Nimmt man diese Geraden zu Seiten des Fundamentaldreieckes, und schreibt demgemäss x_1, x_2, x_3 für A, B, D, so heisst die vorige Gleichung

$$(1) \qquad x_1\,x_2 = k^2\,x_3^2.$$

Man kann nun hier die Coordinaten auf eine einfache Weise durch einen veränderlichen Parameter μ ausdrücken. Denn legt man durch I eine beliebige Gerade, so kann diese durch die Gleichung $x_2 = \mu k x_3$ dargestellt werden. Für den Durchschnitt m derselben mit dem Kegelschnitte findet man dann, indem man aus (1) einmal x_2 und dann x_3 eliminirt, die Gleichungen $\mu x_1 = k x_3$, $\mu^2 x_1 = x_2$. Die durch einen beliebigen Punct m des Kegelschnitts und die Ecken des Fundamentaldreieckes gehenden Geraden haben also durch μ ausgedrückt die Gleichungen

*) Jede der beiden Geraden A und B schneidet den Kegelschnitt in zwei zusammenfallenden Puncten, nämlich da, wo dieser von zwei mit D zusammenfallenden Geraden getroffen wird.

$$Im \ldots . \; x_2 = \mu k x_3$$
(2) $$IIm \ldots \; \mu x_1 = k x_3$$
$$IIIm \ldots \; \mu^2 x_1 = x_2$$

und die Coordinaten des Punctes m sind

$$x_1 : x_2 : x_3 = k : k\mu^2 : \mu.$$

Ebenso hat man für einen zweiten Punct m_1 des Kegelschnittes mit dem Parameter μ_1 die Coordinaten $k : k\mu_1^2 : \mu_1$ und erhält dann aus [18] für die Verbindungslinie $m m_1$ dieser beiden Puncte die Gleichung

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ k & k\mu^2 & \mu \\ k & k\mu_1^2 & \mu_1 \end{vmatrix} = 0,$$

oder nach Unterdrückung des gemeinschaftlichen Factors $k(\mu - \mu_1)$

$$\mu\mu_1 x_1 + x_2 - k(\mu + \mu_1)\, x_3 = 0.$$

Fallen die Puncte m_1 und m zusammen, wird also $\mu_1 = \mu$, so ergiebt sich ferner für die Tangente an dem Kegelschnitte (1) in einem Puncte m desselben mit dem Parameter μ die Gleichung

(3) $$\mu^2 x_1 + x_2 - 2k\mu x_3 = 0.$$

(*Salmon.* Anal. Geom. der Kegelschnitte. Deutsch von *Fiedler*, 2. Aufl. pag. 340.)

132. Zieht man aus einem festen Puncte α Tangenten an alle Kegelschnitte, welche zwei Geraden A und B in denselben Puncten berühren, und daher auch die Berührungssehne D gemeinschaftlich haben, so ist der geometrische Ort der Berührungspuncte ein Kegelschnitt, welcher dem Dreiseit ABD umschrieben ist, und durch den gegebenen Punct α geht.

Beweis. Nimmt man die Geraden ABD zu Seiten des Fundamentaldreiecks und stellt demgemäss [131] den Kegelschnittbüschel durch die Gleichung

$$x_1 x_2 = k^2 x_3^2$$

dar, so ist die Gleichung der Tangente in irgend einem Puncte mit dem Parameter μ an einem der Kegelschnitte nach [131]

$$\mu^2 x_1 + x_2 - 2k\mu x_3 = 0.$$

Soll diese durch den Punct α gehen, dessen Coordinaten $\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3$ seien, so gilt ferner

$$\mu^2 \alpha_1 + \alpha_2 - 2k\mu\alpha_3 = 0.$$

Die letzte Gleichung ist daher die Bedingung, dass ein dem Parameter μ angehöriger Punct auf einem Kegelschnitt, der irgend einem Werthe von k entspricht, ein Berührungspunct einer von α ausgehenden Tangente sei. Eliminirt man also aus ihr μ^2 und μk mit Hülfe der Gleichungen (2) in [131], indem man $\mu^2 = \frac{x_2}{x_1}$, $\mu k = \frac{x_2}{x_3}$ setzt, so erhält man den geometrischen Ort aller dieser Berührungspuncte:

$$\frac{\alpha_1}{x_1} + \frac{\alpha_2}{x_2} - 2\,\frac{\alpha_3}{x_3} = 0,$$

und diese Gleichung stellt für veränderliche x_i einen Kegelschnitt dar, der durch die Ecken des Fundamentaldreiecks geht. [102]. Da ihr genügt wird, wenn man

$$x_1 : x_2 : x_3 = \alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3$$

setzt, so geht der Kegelschnitt auch durch α. (*Salmon* H. pl. Cvs. pag. 160.).

Vierter Abschnitt.

Hülfssätze über algebraische Curven.

§. 1.

133. Eine Curve heisst von der n^{ten} Ordnung, wenn sie in Punctcoordinaten durch eine Gleichung des n^{ten} Grades dargestellt werden kann. Bedeutet also u entweder eine ganze rationale Function n^{ter} Ordnung zweier Parallel-Coordinaten, oder eine solche homogene Function dreier homogener Punctcoordinaten, so ist $u = 0$ die Gleichung einer Curve n. O. Tritt dabei der Fall ein, dass die Function u in zwei oder mehrere rationale Factoren zerlegbar ist, so besteht die Curve n. O. aus dem Complex zweier oder mehrerer Curven niedrigerer Ordnung. Ist dieser Fall aber nicht vorhanden, so heisst die Curve eine einfache Curve n. O.

134. Eine Curve n. O. $u = 0$ wird von einer Geraden im Allgemeinen in n Puncten geschnitten.

Beweis. Verbindet man mit der Gleichung $u = 0$ die einer Geraden $A = 0$, welche vom ersten Grade ist, so liefert die Elimination der einen Coordinate eine Gleichung des n^{ten} Grades für die andere Coordinate (oder bei homogenen Coordinaten für das Verhältniss der beiden andern Coordinaten). Da diese Gleichung genau n Wurzeln besitzt, so erhält man zunächst für die eine Coordinate, und, wenn man dasselbe Verfahren für die andere wiederholt, auch für diese n Werthe, welche den beiden Gleichungen $u = 0$ und $A = 0$ gleichzeitig genügen. Indem man sodann, am einfachsten mit Hülfe der Gleichung $A = 0$, ermittelt, welche Werthe der Coordinaten zusammengehören, erhält man die Coordinaten von n Puncten, welche der Curve $u = 0$ und der Geraden $A = 0$ gemeinsam sind.

135. Es sind hierbei einige specielle Fälle hervorzuheben:

1) Es können zwei oder mehrere Wurzeln der für die eine Coordinate resultirenden Gleichung n^{ten} Grades einander gleich werden, und diesen auch gleiche Werthe der anderen Coordinate entsprechen. Dann fallen zwei oder mehrere Durchschnittspuncte der Geraden mit der Curve in einen zusammen.

2) Es können eine oder mehrere Wurzeln der für eine der Coordinaten resultirenden Gleichung n^{ten} Grades unendlich gross werden. Dann hat die Gerade mit der Curve einen oder mehrere Puncte im Unendlichen gemein.

3) Es können einige oder alle Wurzeln imaginär ausfallen. Solchen imaginären Coordinaten entsprechen dann allerdings keine angebbaren Puncte mehr. Allein da die Werthe der Coordinaten dann immer noch algebraisch vollkommen bestimmt sind, so betrachtet man sie auch in diesem Falle als zu bestimmten Puncten gehörig, und nennt diese imaginäre Puncte. Solche imaginäre Durchschnittspuncte können aber nur paarweise vorhanden sein, da die imaginären Wurzeln der resultirenden Gleichungen nur paarweise conjugirt vorkommen können. Eine Curve von ungerader Ordnung wird daher von einer Geraden mindestens in einem reellen Puncte getroffen.

136. Die im Vorigen hervorgehobenen Fälle bieten keine Ausnahme des Satzes [134] dar. Eine solche tritt aber dann und nur dann ein, wenn die Function u einen linearen

Factor A enthält. Denn dann hat die Gerade $A = 0$ nicht bloss n Puncte, sondern alle Puncte mit der Curve $u = 0$ gemein, da diese alsdann aus der Geraden $A = 0$ und einer Curve $(n-1)$. O. besteht. In jedem andern Falle aber, wenn A nicht ein Factor von u ist, lassen die Gleichungen $u = 0$ und $A = 0$ nur n Auflösungen zu. Daher schliesst man:

137. Wenn eine Gerade mit einer Curve n. O. mehr als n Puncte gemeinsam hat, so macht sie einen Theil dieser Curve aus.

138. Zwei Curven $u = 0$, $v = 0$, resp. von den Ordnungen n und m schneiden sich in nm Puncten. Eine Ausnahme dieses Satzes findet nur dann statt, wenn die Functionen u und v einen rationalen Factor gemeinsam haben. In diesem Falle gehört eine und dieselbe Curve niedrigerer Ordnung beiden Curven an, und die letzteren haben dann unendlich viele Puncte mit einander gemein.

Beweis. Die Elimination jeder der beiden Coordinaten aus den beiden Gleichungen $u = 0$ und $v = 0$ liefert nach [7] für die andere eine Gleichung vom Grade nm. Es giebt daher für jede der beiden Coordinaten nm Werthe, welche den gegebenen Gleichungen gleichzeitig genügen. Indem man mit Hülfe der Letzteren ermittelt, welche Werthe der Coordinaten paarweise zusammengehören, erhält man die Coordinaten von nm Puncten, welche beiden Curven gemeinschaftlich angehören. — Die in [135] gemachten Bemerkungen gelten hier gleichfalls.

139. Bei einer Curve n. O. $u = 0$ besteht die Function u, wenn sie vollständig ist, aus $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ Gliedern.

Beweis. Bezeichnet man die homogenen Coordinaten mit x_1, x_2, x_3 und ordnet die Function u nach Potenzen von x_3, so kann man der Gleichung $u = 0$, indem man mit u_h eine homogene Function h^{ten} Grades von x_1 und x_2 bezeichnet, folgende Form geben

$$u_0 x_3^n + u_1 x_3^{n-1} + u_2 x_3^{n-2} + \ldots + u_n = 0.$$

Dann besteht u_0 aus einem Gliede
u_1 aus 2 Gliedern
u_2 „ 3 „
. . . .
u_n „ $n+1$ „ .

Im Ganzen ist daher die Anzahl der Glieder gleich

$$1 + 2 + 3 + \ldots + (n+1)$$

oder gleich $\frac{(n+1)\,(n+2)}{2}$. (*Salmon.* H. pl. Cvs. pag. 18.)

140. Zur Bestimmung einer Curve n. O. sind $\frac{n\,(n+3)}{2}$ Puncte erforderlich.

Beweis. Setzt man in die allgemeine Gleichung einer Curve n. O. $u = 0$ die Coordinaten eines gegebenen Punctes ein, so erhält man eine lineare Gleichung für die unbekannten Coefficienten. Um daher alle Coefficienten bestimmen zu können, müssen so viele Puncte gegeben sein, als die Gleichung $u = 0$ Coefficienten enthält. Da man nun aber den Coefficienten eines Gliedes durch Division zu Eins machen kann, so enthält die Gleichung $u = 0$ einen zu bestimmenden Coefficienten weniger als Glieder. Demnach ist die Anzahl dieser Coefficienten, und daher auch die Anzahl der zur Bestimmung der Curve erforderlichen Puncte nach [139] gleich $\frac{(n+1)\,(n+2)}{2} - 1$, oder gleich $\frac{n\,(n+3)}{2}$.

141. Ein solches System linearer Gleichungen, wie man hier zur Bestimmung der Coefficienten erhält, kann von verschiedener Beschaffenheit sein. Man erhält bekanntlich die Werthe für die unbekannten Coefficienten in Form von Brüchen, welche einen gemeinschaftlichen Nenner haben. Seien diese

$$\frac{A}{\varDelta}, \frac{B}{\varDelta}, \frac{C}{\varDelta}, \ldots \frac{L}{\varDelta}.$$

Es können nun folgende Fälle eintreten: 1) $\varDelta$ ist von Null verschieden. Dann sind die vorigen Werthe der Coefficienten vollständig bestimmt, also auch die Curve.

2) $\varDelta$ ist Null, aber die Zähler $A, B, \ldots L$ sind nicht alle Null. Wenn man dann nach Substitution der obigen Werthe in die Gleichung $u = 0$, diese mit $\varDelta$ multiplicirt, so verschwindet aus der resultirenden Gleichung eine gewisse Anzahl von Gliedern, aber nicht alle, weil nicht alle Zähler $A, B, \ldots L$ verschwinden. Mithin erhält man wieder eine ganz bestimmte Gleichung, welche eine ganz bestimmte Curve darstellt.

3) Es verschwindet Δ, und gleichzeitig auch alle Zähler $A, B, \ldots L$. Dann werden sämmtliche Coefficienten unbestimmt. In diesem Falle aber sind die linearen Gleichungen nicht von einander unabhängig, und es giebt für die Unbekannten nicht bloss ein, sondern unendlich viele Systeme von Werthen, welche den Gleichungen genügen. In diesem Falle giebt es daher unendlich viele Curven n. O., welche durch die gegebenen Puncte $\frac{n(n+3)}{2}$ Puncte hindurchgehen. Man kann hiernach den Satz aussprechen:

142. Durch $\frac{n(n+3)}{2}$ willkürlich gegebene Puncte lässt sich stets mindestens eine Curve n. O. hindurch legen, und diese ist dann in der Regel durch die gegebenen Puncte bestimmt; es kann aber auch der Fall eintreten, dass unendlich viele Curven n. O. durch jene Puncte möglich sind.

143. Durch $\frac{n(n+3)}{2} - 1$ beliebig gewählte Puncte gehen unendlich viele Curven n. O.; alle Curven n. O. aber, welche durch $\frac{n(n+3)}{2} - 1$ Puncte gehen, haben ausserdem noch $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ Puncte mit einander gemein, schneiden sich also alle in den nämlichen n^2 Puncten.

Beweis. Man kann hier mit Hülfe der gegebenen Puncte nur $\frac{n(n+3)}{2} - 1$ lineare Gleichungen zur Bestimmung der Coefficienten der Curvengleichung bilden, also eine Gleichung weniger, als zu dieser Bestimmung erfordert werden, daher bleibt ein Coefficient unbestimmt, und es giebt mithin unendlich viele Curven n. O., welche durch die gegebenen Puncte gehen. Wenn nun $u = 0$ und $v = 0$ zwei solche Curven sind, so stellt die Gleichung $u + \lambda v = 0$ für jeden Werth von λ eine Curve n. O. dar, welche durch die sämmtlichen Durchschnitte der beiden Curven u und v, und daher auch durch die gegebenen Puncte hindurch geht. Aber die Anzahl aller dieser Durchschnitte ist n^2 [138], also schneiden alle Curven, die durch die Gleichung $u + \lambda v = 0$ dargestellt werden können, die beiden u und v ausser in den gegebenen $\frac{n(n+3)}{2} - 1$ noch in weiteren $n^2 - \frac{n(n+3)}{2} + 1$ Puncten, und

diese letztere Zahl ist gleich

$$\frac{2n^2 - n^2 - 3n + 2}{2} = \frac{n^2 - 3n + 2}{2} = \frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

Es kann aber in der That jede durch die gegebenen $\frac{n(n+3)}{2} - 1$ Puncte gehende Curve durch eine Gleichung von der Form $u + \lambda v = 0$ dargestellt werden. Denn hebt man irgend eine dieser Curven heraus, so kann man auf ihr einen Punct p stets so annehmen, dass dieser zusammen mit den gegebenen Puncten die Curve vollständig bestimmt [142]. Dann kann aber auch λ so bestimmt werden, dass die Curve $u + \lambda v = 0$, welche jedenfalls durch die gegebenen Puncte geht, auch den Punct p enthält. Denn bezeichnen u' und v' die Werthe, welche u und v in p annehmen, so geht die Curve $u + \lambda v = 0$ durch p, wenn $u' + \lambda v' = 0$ oder $\lambda = -\frac{u'}{v'}$ ist. (*Plücker*. Algebraische Curven. pag. 8.)

Es folgt nun aber weiter, dass jede durch die gegebenen $\frac{n(n+3)}{2} - 1$ Puncte gehende Curve durch die Annahme eines weiteren Punctes p vollständig bestimmt wird, sobald der diesem entsprechende Werth $\lambda = -\frac{u'}{v'}$ ein bestimmter ist, und dies tritt nur dann nicht ein, wenn u' und v' gleichzeitig verschwinden, wenn also p ein Durchschnitt der beiden Curven u und v ist. Demnach:

144. Liegen $\frac{n(n+3)}{2}$ Puncte so, dass zwei Curven n. O. durch sie hindurch gehen, so kann man unendlich viele Curven durch sie hindurch legen, und alle diese haben mit einander und mit den beiden gegebenen Curven sämmtliche n^2 Durchschnitte gemeinschaftlich.

145. Ein System von Curven n. O., die sich alle in den nämlichen n^2 Puncten schneiden, heisst ein Curvenbüschel n. O., und die n^2 gemeinschaftlichen Durchschnittspuncte heissen die Basispuncte des Büschels. Jede Curve desselben ist nach [143] vollständig bestimmt, sobald auf ihr noch ein weiterer Punct gegeben ist. Bedeuten $u = 0$ und $v = 0$ irgend zwei Curven des Büschels, so lässt sich, wenn

mit λ ein veränderlicher Parameter bezeichnet wird, der Büschel durch die Gleichung

$$u + \lambda v = 0$$

darstellen. Hiermit lassen sich die vorigen Sätze auch so aussprechen:

Alle Curven n. O., welche durch $\frac{n(n+3)}{2} - 1$ Puncte gehen, bilden einen Curvenbüschel n. O. [143].

Die n^2 Durchschnittspuncte zweier Curven n. O. sind zugleich die Basispuncte eines Curvenbüschels n. O. — Ferner:

146. Sollen n^2 Puncte die Durchschnitte zweier Curven n. O. und daher [145] auch die Basispuncte eines Curvenbüschels n. O. sein, so darf man diese nicht alle willkürlich wählen, sondern nur $\frac{n(n+3)}{2} - 1$, d. i. $n^2 - \frac{(n-1)(n-2)}{2}$ unter ihnen, weil nach [143] die übrigen $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ Puncte durch die ersteren schon mit bestimmt sind.

147. Wir wollen die beiden im Vorigen aufgetretenen Zahlen mit besonderen Buchstaben bezeichnen; nämlich es sei

$\mathfrak{A}_n = \frac{n(n+3)}{2}$ die Anzahl der Puncte, welche zur Bestimmung einer Curve n. O. erforderlich ist.

$\mathfrak{B}_n = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$ die Anzahl der Durchschnitte zweier Curven n. O., welche nicht willkürlich angenommen werden dürfen.

Dann findet folgende Relation statt, die sich durch Rechnung leicht verificiren lässt:

$$\mathfrak{A}_n - 1 - \mathfrak{A}_{n-p} = np - \mathfrak{B}_p.$$

148. Liegen von den n^2 Durchschnitten zweier Curven n. O. (oder den n^2 Basispuncten eines Curvenbüschels) np auf einer Curve p. O., C_p (wenn $p < n$), so liegen die übrigen $n(n-p)$ auf einer Curve $(n-p)$. O., C_{n-p}.

B e w e i s. Wählt man unter den $n(n-p)$ übrigen Durchschnitten beliebige $\mathfrak{A}_{n-p}$ aus, so kann man durch diese eine Curve $(n-p)$. O., C_{n-p} legen, welche mit C_p zusammen eine Curve n. O., (C_p, C_{n-p}) bildet. Diese geht der Annahme nach durch $np + \mathfrak{A}_{n-p}$ jener Durchschnitte, welche Zahl nach [147] gleich $(\mathfrak{A}_n - 1) + \mathfrak{B}_p$ ist. Nun ist $\mathfrak{B}_p$ entweder Null

(nämlich für $p = 1$, oder $p = 2$) oder positiv, daher

$$np + \mathfrak{A}_{n-p} \geq \mathfrak{A}_n - 1;$$

folglich geht die Curve n. O. (C_p, C_{n-p}) sicher durch $\mathfrak{A}_n - 1$ jener Durchschnittspuncte und daher [143] auch durch alle übrigen. Demnach liegen diese entweder auf C_p oder auf C_{n-p}; aber C_p kann nicht mehr als die angenommenen np Puncte enthalten [138], daher müssen alle übrigen $n(n-p)$ auf C_{n-p} liegen. (*Plücker*. Algebr. Curven pag. 12).

§. 2.

149. Sei $u = 0$ die Gleichung einer Curve n. O. in homogenen Coordinaten, und x und y zwei beliebige Puncte. Jeder Punct z auf der Verbindungslinie xy der letzteren hat [19] die Coordinaten

$$z_i = x_i + \lambda y_i. \quad (i = 1, 2, 3).$$

Nimmt man an, dass der Punct z zugleich auf der Curve $u = 0$ liegt, so erhält man, wenn man die vorigen Ausdrücke in diese Gleichung substituirt, nach [4]

$$(1) \quad 0 = u_x + \lambda \Delta_y (u_x) + \frac{\lambda^2}{2!} \Delta_y^2 (u_x) + \frac{\lambda^3}{3!} \Delta_y^3 (u_x) + \cdots + \frac{\lambda^n}{n!} \Delta_y^n (u_x),$$

und dann gehören die n Werthe von λ, welche dieser Gleichung genügen, den n Puncten z an, in welchen die Gerade xy die Curve schneidet. Liegt der Punct x auf der Curve, so ist $u_x = 0$ und die Gleichung (1) hat dann eine Wurzel $\lambda = 0$. Man halte nun diesen Punct x fest, variire aber die Lage des Punktes y, und gebe diesem solche Lagen, dass $\Delta_y (u_x) = 0$ wird. Dann hat die Gleichung (1) zwei Wurzeln $\lambda = 0$, d. h. die Gerade xy hat in x zwei Puncte mit der Curve gemein, oder diese Gerade berührt die Curve in x. Durch die Gleichung $\Delta_y (u_x) = 0$ oder nach [1]

$$y_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + y_3 \frac{\partial u}{\partial x_3} = 0$$

ist die Lage des Punktes y nicht vollständig bestimmt, sein geometrischer Ort ist vielmehr eine Gerade, und zwar offenbar die Tangente in x selbst. (*Salmon*, H. pl. Cvs. pag. 62.) Daher folgt:

Ist x ein Punct einer Curve $u = 0$, und sind y_1, y_2, y_3 veränderliche Coordinaten, so ist

$$\varDelta_y\,(u_x) = y_1\,\frac{\partial u}{\partial x_1} + y_2\,\frac{\partial u}{\partial x_2} + y_3\,\frac{\partial u}{\partial x_3} = 0$$

die Gleichung der Tangente an der Curve im Puncte x.

150. Es kann geschehen, dass während der Punct x fest gehalten wird, der Ausdruck $\varDelta_y\,(u_x)$ für jede Lage des Puncts y verschwindet, was nur möglich ist, wenn der Punct x so liegt, dass für ihn gleichzeitig die drei Gleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = 0,\ \frac{\partial u}{\partial x_2} = 0,\ \frac{\partial u}{\partial x_3} = 0$$

stattfinden. Dann hat die Gl. (1) in [149] für jede Lage der Geraden xy zwei Wurzeln $\lambda = 0$, d. h. diese Gerade trifft in jeder ihrer Lagen die Curve in zwei in x zusammenfallenden Puncten. In einem solchen Falle geht die Curve selbst zwei Mal durch den Punct x, und dieser heisst dann ein Doppelpunct der Curve. Demnach ist die Bedingung dafür, dass x ein Doppelpunct der Curve $u = 0$ sei, das gleichzeitige Stattfinden der drei Gleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = 0,\ \frac{\partial u}{\partial x_2} = 0,\ \frac{\partial u}{\partial x_3} = 0.$$

Dieses sind drei homogene Gleichungen zwischen den Variabeln x_1, x_2, x_3; man kann diese daher aus jenen eliminiren und erhält als Resultat eine Bedingungsgleichung zwischen den Coefficienten der Gleichung $u = 0$. Hieraus folgt: Eine Curve n. O. hat im Allgemeinen keine Doppelpuncte, sondern nur dann, wenn zwischen den Coefficienten ihrer Gleichung eine gewisse Bedingungsgleichung besteht.

151. Nehmen wir nun an, es sei x ein Doppelpunct der Curve $u = 0$, sodass sowohl $u_x = 0$, als auch $\varDelta_y\,(u_x) = 0$ ist, letzteres für jede Lage des Puncts y. Nun möge dieser eine solche Lage annehmen, dass ausserdem auch noch $\varDelta^2{}_y\,(u_x) = 0$ wird; dann werden in der Gleichung (1) in [149] drei Wurzeln λ gleich Null; die Gerade xy schneidet also die Curve in drei in x zusammenfallenden Puncten und berührt daher einen der beiden durch den Doppelpunct gehenden Curvenzweige, oder die Gerade xy ist eine der beiden in dem Doppelpuncte stattfindenden Tangenten. Die Coordinaten des Puncts y sind nur der Gleichung

$$\varDelta_y^2(u_x) = \Sigma\Sigma\, y_i\, y_k \frac{\partial^2 u}{\partial x_i\, \partial x_k} = 0$$

unterworfen; daher ist y nicht vollständig bestimmt, sondern sein geometrischer Ort ist, wie diese Gleichung zeigt, ein Kegelschnitt. Da aber für alle diesem Orte angehörigen Lagen von y die Gerade xy eine der beiden Tangenten im Doppelpuncte ist, so besteht der geometrische Ort des Punctes y, eben jener Kegelschnitt, aus diesen beiden Tangenten. Somit gilt:

Ist x ein Doppelpunct einer Curve $u = 0$, so ist die Gleichung

$$(1) \qquad \varDelta_y^2(u_x) = \Sigma\Sigma\, y_i\, y_k \frac{\partial^2 u}{\partial x_i\, \partial x_k} = 0$$

bei veränderlichen y_i die Gleichung der beiden Tangenten in dem Doppelpuncte.

152. Man kann direct zeigen, dass die letzte Gleichung zwei gerade Linien darstellt, wenn x ein Doppelpunct ist. Nach dem *Euler*'schen Satze [6] ist nämlich, da die partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial u}{\partial x_1}$, $\frac{\partial u}{\partial x_2}$, $\frac{\partial u}{\partial x_3}$ homogene Functionen vom Grade $n-1$ sind,

$$(n-1)\frac{\partial u}{\partial x_1} = x_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + x_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + x_3 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_3}$$

$$(n-1)\frac{\partial u}{\partial x_2} = x_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x_2\, \partial x_1} + x_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + x_3 \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_3}$$

$$(n-1)\frac{\partial u}{\partial x_3} = x_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x_3 \partial x_1} + x_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_3 \partial x_2} + x_3 \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2},$$

und diese Ausdrücke müssen verschwinden [150], wenn x ein Doppelpunct ist. Wir schreiben die hieraus resultirenden Gleichungen etwas einfacher, indem wir uns der Bezeichnung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_h \partial x_k} = u_{hk},$$

bedienen, bei welcher also $u_{hk} = u_{kh}$ ist, nämlich folgendermassen

$$(2) \qquad \begin{aligned} u_{11}x_1 + u_{12}x_2 + u_{13}x_3 &= 0 \\ u_{21}x_1 + u_{22}x_2 + u_{23}x_3 &= 0 \\ u_{31}x_1 + u_{32}x_2 + u_{33}x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Da diese drei Gleichungen zusammen bestehen müssen, so kann man aus ihnen x_1, x_2, x_3 eliminiren und erhält als Resultat

$$\begin{vmatrix} u_{11}, & u_{12}, & u_{13} \\ u_{21}, & u_{22}, & u_{23} \\ u_{31}, & u_{32}, & u_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Dieses aber ist nach [84] die Bedingung, dass der Kegelschnitt (1) in [151], dessen Gleichung mit der neuen Bezeichnung so geschrieben werden kann,

$$(1)\ \Delta_y^2 (u_x) = u_{11}\, y_1^2 + u_{22}\, y_2^2 + u_{33}\, y_3^2 + 2\, u_{23}\, y_2\, y_3 + 2\, u_{31}\, y_3\, y_1 + 2\, u_{12}\, y_1\, y_2 = 0,$$

aus zwei Geraden besteht. (*Salmon*, H. pl. Cvs. pag .66.)

152[a]. Die aus den zweiten partiellen Differentialquotienten der Function u gebildete Determinante führt nach *Sylvester* (Cambridge und Dublin math. Journ. VI. pag 186. S. *Baltzer* Theorie und Anwendung der Determinanten, 2. Aufl. pag. 122) den Namen der *Hesse*'schen Determinante und soll in der Folge durch $H(u)$ bezeichnet werden, sodass

$$H(u) = \begin{vmatrix} u_{11}, & u_{12}, & u_{13} \\ u_{21}, & u_{22}, & u_{23} \\ u_{31}, & u_{32}, & u_{33} \end{vmatrix}$$

ist. Da jeder der zweiten partiellen Differentialquotienten u_{hk} vom Grade $n-2$ ist, so ist $H(u)$ vom Grade $3(n-2)$. Betrachtet man darin die Grössen x_i als veränderlich, so stellt die Gleichung $H(u) = 0$ eine Curve von der Ordnung $3(n-2)$ dar, welche die *Hesse*'sche Curve der ursprünglichen Curve $u = 0$ genannt wird. Da die Gleichung $H(u) = 0$ sich als unmittelbare Folge der Gleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = 0,\ \frac{\partial u}{\partial x_2} = 0,\ \frac{\partial u}{\partial x_3} = 0$$

ergeben hat, so zeigt sich, dass die Puncte x der Curve $u=0$, welche Doppelpuncte sind, zugleich auf der Hesse'schen Curve $H(u) = 0$ liegen. Daher gilt:

Wenn eine Curve $u = 0$ Doppelpuncte besitzt, so geht die Hesse'sche Curve $H(u) = 0$ durch die Doppelpuncte hindurch.

Die Gleichung $H(u) = 0$ ist zwar eine Folge der Gleichungen $\frac{\partial u}{\partial x_1} = 0$, $\frac{\partial u}{\partial x_2} = 0$, $\frac{\partial u}{\partial x_3} = 0$, aber diese folgen nicht umgekehrt aus jener; man darf daher nicht umgekehrt schliessen, dass alle Durchschnitte der Hesse'schen Curve mit der Curve

$u = 0$ Doppelpuncte der letzteren sind; wir haben im Gegentheil gesehen [150], dass die Curve $u = 0$ im Allgemeinen gar keine Doppelpuncte besitzt.

153. Die beiden Tangenten in einem Doppelpuncte x können auch in eine zusammenfallen; in diesem Falle heisst der Doppelpunct x eine Spitze oder ein Rückkehrpunct, und die gemeinschaftliche Tangente eine Rückkehrtangente. Die Rückkehrpuncte bilden also eine specielle Art von Doppelpuncten.*) In diesem Falle muss der linke Theil der Gleichung (1) in [151] oder [152], welche die beiden Tangenten in dem Doppelpuncte darstellt, aus zwei gleichen linearen Factoren bestehen, also ein vollständiges Quadrat bilden. Daher muss der Ausdruck

$$u_{11}y_1^2 + u_{22}y_2^2 + u_{33}y_3^2 + 2u_{23}y_2y_3 + 2u_{31}y_3y_1 + 2u_{12}y_1y_2$$

von der Form

$$(p_1y_1 + p_2y_2 + p_3y_3)^2 = p_1^2y_1^2 + p_2^2y_2^2 + p_3^2y_3^2 + 2p_2p_3y_2y_3 + 2p_3p_1y_3y_1 + 2p_1p_2y_1y_2$$

sein. Hieraus folgt

$$u_{11} = p_1^2, \quad u_{22} = p_2^2, \quad u_{33} = p_3^2$$
$$u_{23} = p_2p_3, \quad u_{31} = p_3p_1, \quad u_{12} = p_1p_2,$$

und daraus

$$(u_{23})^2 = u_{22} \cdot u_{33}, \quad (u_{31})^2 = u_{33} \cdot u_{11}, \quad (u_{12})^2 = u_{11} \cdot u_{22},$$

und dann ist

$$p_1y_1 + p_2y_2 + p_3y_3 = \sqrt{u_{11}} \cdot y_1 + \sqrt{u_{22}} \cdot y_2 + \sqrt{u_{33}} \cdot y_3 = 0$$

die Gleichung der Rückkehrtangente.

154. Eine einfache Curve n. O., C_n kann nicht mehr als $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ Doppelpuncte haben. (*Plücker.* Alg. Curven. pag. 215.)

Beweis. Hätte sie mehr, also etwa $\frac{(n-1)(n-2)}{2} + 1$

---

*) Ein Doppelpunct kann auch von der Art sein, dass, obgleich er selbst reell ist, die Tangenten in ihm und daher auch die beiden durch ihn hindurchgehenden Curvenzweige imaginär sind. Dieser Fall tritt ein, wenn die Gleichungen (1) und (2) in [152] reell sind, aber der linke Theil der ersteren aus zwei imaginären linearen Factoren besteht. In diesem Falle heisst der Doppelpunct ein isolirter oder conjugirter Punct.

Doppelpuncte, so könnte man durch diese eine Curve $(n-2)$. O. C_{n-2} hindurch legen. Da hierzu nach [140]

$$\frac{(n-2)(n-2+3)}{2} = \frac{(n-2)(n+1)}{2}$$

Puncte erforderlich sind, so ist die Anzahl der noch fehlenden Puncte gleich

$$\frac{(n-2)(n+1)}{2} - \frac{(n-1)(n-2)}{2} - 1 = \frac{(n-2)(n+1-n+1)-2}{2}$$
$$= \frac{2(n-2)-2}{2} = n-3.$$

Wählt man diese auf der Curve C_n, so hätten die beiden Curven C_n und C_{n-2} erstlich diese $n-3$ Puncte und dann die $\frac{(n-1)(n-2)}{2}+1$ Doppelpuncte mit einander gemein. Aber da in jedem Doppelpuncte zwei Schnittpuncte vereinigt sind, so wäre die Anzahl der Schnittpuncte beider Curven gleich $n-3+(n-1)(n-2)+2=(n-2)n+1$. Dieses aber ist nicht möglich, so lange C_n eine einfache Curve ist, denn dann können die Curven C_n und C_{n-2} nicht mehr als $(n-2)n$ Durchschnittspuncte besitzen [138]. (*Salmon.* Higher pl. Curves. pag. 31.)

§. 3.

155. Wir kehren nun zu den in [149] gemachten Annahmen zurück, dass nämlich der Punct x ein einfacher Punct der Curve $u=0$ sei, und daher die Gleichung $\Delta_y(u_x)=0$ für veränderliche y_i die Tangente in diesem Puncte darstellt. Lässt man den Punct x seine Lage längs der Curve ändern, so kann der Fall eintreten, dass für eine specielle Lage des x und für besondere Lagen von y gleichzeitig $\Delta_y(u_x)=0$ und $\Delta_y{}^2(u_x)=0$ wird. Dann ist die Gerade xy immer noch Tangente an der Curve, hat aber in dem Puncte x, ohne dass dieser ein Doppelpunct ist, drei Puncte mit der Curve gemein. Man sagt dann, die Gerade xy habe eine dreipunctige Berührung mit der Curve; man nennt ferner einen solchen Punct x einen Wendepunct (Inflexionspunct) und die Tangente in diesem eine Wendetangente. Die Coordinaten y müssen jetzt gleichzeitig den Gleichungen $\Delta_y(u_x)=0$ und $\Delta_y{}^2(u_x)=0$ genügen, und doch sind ihre Werthe nicht vollständig bestimmt, da ja der Punct y jede Lage auf der Wende-

tangente xy haben kann. Jene beiden Gleichungen können daher nicht anders zusammen bestehen, als wenn die in den y_i lineare Function $\Delta_y(u_x)$ ein Factor der anderen Function zweiten Grades $\Delta_y{}^2(u_x)$ ist. Die letztere muss sich also, wenn der in Rede stehende Fall eintreten soll, in zwei lineare Factoren zerlegen lassen. Die Bedingung dafür ist [152] die Gleichung

$$H(u) = 0.$$

Es ergiebt sich also, dass ein Wendepunct x der Curve $u=0$ immer zugleich auf der Hesse'schen Curve liegt.

156. Man kann nun aber auch das Umgekehrte zeigen, nämlich dass jeder Schnittpunct der Hesse'schen Curve mit der Curve u, der nicht ein Doppelpunct ist, ein Wendepunct sein muss. Wir sahen in [152], dass die Gleichung $H(u)=0$ einmal als Folge der Gleichungen $\frac{\partial u}{\partial x_1}=0$, $\frac{\partial u}{\partial x_2}=0$, $\frac{\partial u}{\partial x_3}=0$ auftreten kann; in diesem Falle ist der Durchschnitt x der Hesse'schen Curve mit der Curve u ein Doppelpunct. Jetzt aber nehmen wir an, dass x nicht ein Doppelpunct, sondern ein einfacher Curvenpunct sei. Alsdann stellt die Gleichung

$$\Delta_y{}^2(u_x) = 0$$

bei veränderlichen y_i immer noch einen Kegelschnitt dar. Von diesem lässt sich zuerst zeigen, dass er durch x hindurch geht. Denn setzt man x statt y, so erhält man $\Delta_x{}^2(u_x)$; dieses aber ist nach [6] gleich $n(n-1)u_x$ und verschwindet, weil x auf der Curve $u=0$ liegt. Ferner aber berührt der Kegelschnitt $\Delta_y{}^2(u_x)=0$ die Curve in x. Denn bildet man, um dies zu zeigen, die Tangente desselben im Puncte x, so hat man, wenn mit z_i die laufenden Coordinaten der Tangente bezeichnet werden, nach [149] mit dem als Function der y_i zu betrachtenden Ausdruck $\Delta_y{}^2(u_x)$ die Operation Δ_z vorzunehmen und die Coordinaten des Berührungspunctes x statt der y_i zu setzen. Nun ist nach [2]

$$\frac{\partial}{\partial y_i}(\Delta_y{}^2(u_x)) = 2\Delta_y\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)$$

und daher die Gleichung der gesuchten Tangente

$$z_1\Delta_x\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right) + z_2\Delta_x\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right) + z_3\Delta_x\left(\frac{\partial u}{\partial x_3}\right) = 0.$$

Aber da nach dem *Euler*'schen Satze [6]

$$\Delta_x\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = (n-1)\frac{\partial u}{\partial x_i}$$

ist, so geht die Gleichung der Tangente des Kegelschnitts über in

$$z_1\frac{\partial u}{\partial x_1} + z_2\frac{\partial u}{\partial x_2} + z_3\frac{\partial u}{\partial x_3} = 0$$

und stellt daher [149] zugleich die Tangente an der Curve $u = 0$ dar. Also berührt der Kegelschnitt $\Delta_y^2(u_x) = 0$ die Curve $u = 0$ in x. Wenn nun aber der Punct x zugleich auf der Hesse'schen Curve $H(u) = 0$ liegt, so besteht [152] dieser Kegelschnitt aus zwei Geraden, und da er ausserdem die Curve $u = 0$ berührt, so muss die eine Gerade die Tangente der Curve sein, also die Gleichung $\Delta_y(u_x) = 0$ haben, und folglich muss $\Delta_y(u_x)$ ein Factor von $\Delta_y^2(u_x)$ sein. Demnach verschwinden diese Ausdrücke gleichzeitig, und die Gleichung (1) in [149] besitzt drei Wurzeln λ gleich Null, oder die Gerade xy trifft die Curve in drei zusammenfallenden Puncten, d. h., der Punct x, welcher der Annahme nach ein einfacher Curvenpunct ist, ist ein Wendepunct. (*Salmon.* H. pl. Cvs. pag. 71.)

157. Hieraus folgt nun: Die Wendepuncte einer Curve n. O. $u = 0$, welche keine Doppelpuncte besitzt, sind die Durchschnitte derselben mit der Hesse'schen Curve $H(u) = 0$.

158. Eine Curve n. O. welche keine Doppelpuncte hat, besitzt $3n(n-2)$ Wendepuncte. — Denn die Hesse'sche Curve ist von der Ordnung $3(n-2)$ [152], sie hat daher $3n(n-2)$ Schnittpuncte mit der gegebenen Curve [138], und dies sind die Wendepuncte.

§. 4.

159. Ein Curvenpunct p heisst ein k-facher Punct, wenn beliebige durch ihn gelegte Geraden die Curve in k mit p zusammenfallenden Puncten schneiden. In diesem Falle gehen k Zweige der Curve durch den Punct p. Die k Tangenten an diesen haben daher $k+1$ Puncte mit der Curve in p gemein, jede andere Gerade dagegen k Puncte.

160. Enthält die Gleichung einer Curve n. O. in homo-

genen Coordinaten x_1, x_2, x_3 eine der letzteren, z. B. x_3 nur in der $(n-k)^{ten}$ Potenz und niedrigeren Potenzen, so ist die Ecke *III* ($x_1 = 0$, $x_2 = 0$) des Fundamentaldreieckes ein k-facher Punct; und umgekehrt.

Beweis. Ordnet man die Gleichung der Curve nach Potenzen von x_3, so werden die Coefficienten homogene Functionen von x_1 und x_2. Bezeichnet man eine solche, wenn sie vom Grade h ist, mit v_h, so heisst das Glied, welches $x_3{}^r$ enthält, $v_{n-r}\, x_3{}^r$, weil alle Glieder von der n^{ten} Dimension sein müssen. Der Annahme nach ist daher die Gleichung der Curve von folgender Form:

$$v_k x_3{}^{n-k} + v_{k+1} x_3{}^{n-k-1} + \ldots + v_n = 0.$$

Ist nun $x_2 = \mu x_1$ die Gleichung einer beliebigen durch die Ecke *III* gehenden Geraden, so erhält man die Durchschnitte derselben mit der Curve, wenn man in die vorige Gleichung μx_1 für x_2 substituirt. Alsdann reducirt sich v_h auf die Form $a_h x_1{}^h$, wo a_h eine Constante ist. Daher wird dann die vorige Gleichung

$$a_k x_1{}^k x_3{}^{n-k} + a_{k+1} x_1{}^{k+1} x_3{}^{n-k-1} + \ldots + a_n x_1{}^n = 0,$$

und diese giebt die n Werthe von $\frac{x_1}{x_3}$ an, welche den n Durchschnitten der Curve mit der Geraden $x_2 = \mu x_1$ zugehören. Dividirt man aber mit $x_3{}^n$, so erhält man

$$a_k \left(\frac{x_1}{x_3}\right)^k + a_{k+1} \left(\frac{x_1}{x_3}\right)^{k+1} + \ldots + a_n \left(\frac{x_1}{x_3}\right)^n = 0,$$

und diese Gleichung hat k Wurzeln $\frac{x_1}{x_3}$ gleich Null. In dem Puncte $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, liegen also k Durchschnitte der Gerade $x_2 = \mu x_1$ mit der Curve vereinigt. Da aber diese Gerade beliebig gewählt werden kann, so ist nach [159] die Ecke *III* ein k-facher Punct der Curve. — Das Umgekehrte ergiebt sich unmittelbar, denn hätte die Gleichung eine andere Form, so wäre die Ecke *III* nach dem eben Bewiesenen ein mehrfacher Punct von anderer Ordnung als der k^{ten}. (*Salmon.* H. pl. Cvs. pag. 30.)

161. Wenn ein Punct als ein k-facher einer Curve n. O. gegeben ist, so zählt derselbe bei der Bestimmung der Curve durch Puncte für $\frac{k(k+1)}{2}$ einfache Puncte.

Beweis. Legt man die Ecke *III* des Fundamentaldreieckes in den k-fachen Punct, so fehlen der Gleichung der Curve nach [160] die Glieder

$$v_0 x_3^n, \; v_1 x_3^{n-1}, \; \ldots \; v_{k-1} x_3^{n-k+1},$$

welche $1 + 2 + 3 + \ldots + k = \frac{k(k+1)}{2}$ Coefficienten enthalten. Man braucht daher nach [140] zur Bestimmung der vorhandenen Coefficienten ausser der Ecke *III* nur noch $\frac{n(n+3)}{2} - \frac{k(k+1)}{2}$ Puncte zu kennen, und ebenso viele würden noch erforderlich sein, wenn statt des k-fachen Punctes $\frac{k(k+1)}{2}$ einfache Puncte gegeben wären. (*Salmon.* H. pl. Cvs. pag. 33.)

162. Hat eine Curve n. O. in der Ecke *III* ($x_1=0, x_2=0$) des Fundamentaldreieckes einen k-fachen Punct, sodass ihre Gleichung nach [160] in der Form

$$(1) \qquad v_k x_3^{n-k} + v_{k+1} x_3^{n-k-1} + \ldots + v_n = 0$$

dargestellt werden kann, so drückt die Gleichung $v_k = 0$ die k in dem k-fachen Puncte stattfindenden Tangenten aus.

Beweis. $v_k=0$ ist eine homogene Gleichung k^{ten} Grades zwischen den Coordinaten x_1, x_2, daher enthält sie nur eine Variable, $\frac{x_2}{x_1}$, und lässt sich also in k lineare Factoren zerlegen. Sie stellt daher k Gerade dar, welche durch den Punct *III* hindurch gehen. Ist $\frac{x_2}{x_1} = \frac{m}{n}$ eine der Wurzeln der Gleichung $v_k = 0$, so ist $mx_1 - nx_2 = 0$ eine jener Geraden. Substituirt man nun in (1) den Werth $x_2 = \frac{m}{n} x_1$, so erhält man eine homogene Gleichung zwischen x_1 und x_3, welche die Werthe von $\frac{x_1}{x_3}$ liefert, die den n Durchschnitten der Geraden $mx_1 - nx_2 = 0$ mit der Curve zugehören. Durch diese Substitution erhält v_k den Werth Null, weil $mx_1 - nx_2$ einer der Factoren von v_k ist, jedes andere v_h aber reducirt sich auf die Form $b_h x_1^h$, wo b_h eine Constante ist. Man erhält daher

$$b_{k+1} x_1^{k+1} x_3^{n-k-1} + b_{k+2} x_1^{k+2} x_3^{n-k-2} + \ldots + b_n x_1^n = 0,$$

und nach Division mit x_3^n

$$b_{k+1}\left(\frac{x_1}{x_3}\right)^{k+1} + b_{k+2}\left(\frac{x_1}{x_3}\right)^{k+2} + \ldots + b_n\left(\frac{x_1}{x_3}\right)^n = 0.$$

Diese Gleichung aber hat $k+1$ Wurzeln $\frac{x_1}{x_3}$ gleich Null, d. h., die Gerade $mx_1 - nx_2 = 0$ schneidet die Curve im Puncte $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, in $k+1$ zusammenfallenden Puncten und ist daher [159] eine Tangente in diesem Puncte. (*Salmon.* H. pl. Cvs. pag. 30.)

163. Als specielle Fälle sind dabei hervorzuheben: Bei der Gleichung

$$a x_1 x_3^{n-1} + v_2 x_3^{n-2} + \ldots + v_n = 0$$

berührt die Curve die Seite $x_1 = 0$ in der Ecke *III*.

$$a x_1 x_2 x_3^{n-2} + v_3 x_3^{n-3} + \ldots + v_n = 0;$$

die Ecke *III* ist ein Doppelpunct, und die Seiten $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ die Tangenten in dem Doppelpuncte.

$$a x_1^2 x_3^{n-2} + v_3 x_3^{n-3} + \ldots + v_n = 0;$$

die Ecke *III* ist ein Rückkehrpunct, und $x_1 = 0$ die Rückkehrtangente.

§. 5.

164. Hat eine Curve n. O. $u = 0$ einen Doppelpunct d, so hat ihre Hesse'schen Curve $H(u) = 0$ in d ebenfalls einen Doppelpunct, und beide Curven haben das Tangentenpaar in d gemeinschaftlich.

B e w e i s. Nimmt man die beiden Tangenten in d als zwei Seiten $x_1 = 0$ und $x_2 = 0$ des Fundamentaldreieckes, so hat die Gleichung der Curve $u = 0$ nach [163] folgende Form:

$$u = x_1 x_2 x_3^{n-2} + v_3 x_3^{n-3} + \ldots + v_n = 0.$$

Bei der Bildung von $H(u)$ braucht man nun nur diejenigen Glieder zu berücksichtigen, welche in Beziehung auf x_1 und x_2 die niedrigste Dimension haben. Man erhält durch Differentiation

$$u_{11} = \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_1^2} x_3^{n-3} + \ldots \qquad u_{23} = (n-2) x_1 x_3^{n-3} + \ldots$$

$$u_{22} = \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_2^2} x_3^{n-3} + \ldots \qquad u_{31} = (n-2) x_2 x_3^{n-3} + \ldots$$

$$u_{33} = (n-2)(n-3) x_1 x_2 x_3^{n-4} + \ldots \qquad u_{12} = x_3^{n-2} + \ldots$$

und hiermit

$$H(u) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_1^2} x_3^{n-3} + \dots, & x_3^{n-2} + \dots, & (n-2) x_2 x_3^{n-3} + \dots \\ x_3^{n-2} + \dots, & \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_2^2} x_3^{n-3} + \dots, & (n-2) x_1 x_3^{n-3} + \dots \\ (n-2) x_2 x_3^{n-3} + \dots, & (n-2) x_1 x_3^{n-3} + \dots, & (n-2)(n-3) x_1 x_2 x_3^{n-4} + \dots \end{vmatrix}.$$

Entwickelt man nun diese Determinante und berücksichtigt, dass $\frac{\partial^2 v_3}{\partial x_1^2}$ und $\frac{\partial^2 v_3}{\partial x_2^2}$ in Beziehung auf x_1 und x_2 von der ersten Dimension sind, so überzeugt man sich leicht, dass die meisten Glieder nicht unter die 3te Dimension in x_1 und x_2 herabsinken, und dass nur folgende die 2te enthalten:

$$(n-2)^2 x_1 x_2 x_3^{3n-8}, \quad -(n-2)(n-3) x_1 x_2 x_3^{3n-8},$$
$$(n-2)^2 x_1 x_2 x_3^{3n-8}.$$

Die Summe dieser letzteren hat den Coefficienten

$2(n-2)^2 - (n-2)(n-3) = (n-2)(2n-4-n+3) = (n-1)(n-2)$,

daher erhält die Gleichung der Hesse'schen Curve, wenn mit V_h ähnliche Ausdrücke bezeichnet werden, wie früher mit v_h, folgende Form

$$H(u) = (n-1)(n-2) x_1 x_2 x_3^{3n-8} + V_3 x_3^{3n-9} + \dots + V_{3n-6} = 0.$$

Diese ist von der Ordnung $3n-6$, enthält aber x_3 höchstens in der Potenz $3n-8$, daher ist [160] die Ecke $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ ein Doppelpunct, und das Tangentenpaar in diesem hat nach [162] die Gleichung

$$(n-1)(n-2) x_1 x_2 = 0,$$

besteht also aus den beiden Geraden $x_1 = 0$, $x_2 = 0$. (*Salmon.* H. pl. Cvs. pag. 73.)

165. Wenn eine Curve n. O. $u = 0$ einen Rückkehrpunct r besitzt, so hat ihre Hesse'sche Curve $H(u) = 0$ in r einen dreifachen Punct und zwar der Art, dass von den drei Tangenten desselben zwei mit der Rückkehrtangente der Curve $u = 0$ zusammenfallen.

Beweis. Legt man die Ecke *III* des Fundamentaldreieckes in r hinein und lässt die Seite $x_1 = 0$ mit der Rückkehrtangente zusammenfallen, so heisst die Gleichung der Curve $u = 0$ nach [163]

$$u = x_1^2 x_3^{n-2} + v_3 x_3^{n-3} + \dots + v_n = 0.$$

Bildet man nun, wie in [164] die Determinante $H(u)$, indem man nur die Glieder hinschreibt, welche in x_1 und x_2 die niedrigste Dimension haben, so erhält man

$$H(u)=\begin{vmatrix} 2x_3^{n-2}+\dots, & \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_1 \partial x_2} x_3^{n-3}+\dots, & 2(n-2)x_1 x_3^{n-3}+\dots \\ \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_1 \partial x_2} x_3^{n-3}+\dots, & \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_2^2} x_3^{n-3}+\dots, & (n-3)\frac{\partial v_3}{\partial x_2} x_3^{n-4}+\dots \\ 2(n-2)x_1 x_3^{n-3}+\dots, & (n-3)\frac{\partial v_3}{\partial x_2} x_3^{n-4}+\dots, & (n-2)(n-3)x_1^2 x_3^{n-4}+\dots \end{vmatrix}.$$

Hierin sind $\frac{\partial^2 v_3}{\partial x_1 \partial x_2}$ und $\frac{\partial^2 v_3}{\partial x_2^2}$ in Beziehung auf x_1 und x_2 von der ersten, $\frac{\partial v_3}{\partial x_2}$ aber von der zweiten Dimension, daher sinken die meisten Glieder der Determinante in x_1 und x_2 nicht unter die 4[te] Dimension hinab, und nur folgende sind von der 3[ten]:

$$2(n-2)(n-3)x_1^2 \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_2^2} x_3^{3n-9}, \quad -4(n-2)^2 x_1^2 \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_2^2} x_3^{3n-9},$$

bei welchen die Summe der Coefficienten gleich

$$2(n-2)(n-3)-4(n-2)^2 = 2(n-2)(n-3-2n+4)$$
$$= -2(n-1)(n-2)$$

ist. Die Hesse'sche Curve erhält hiernach die Gleichung

$$H(u) = -2(n-1)(n-2)x_1^2 \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_2^2} x_3^{3n-9}$$
$$+ V_4 x_3^{3n-10} + \dots + V_{3n-6} = 0.$$

Diese ist von der Ordnung $3n-6$, aber x_3 kommt höchstens in der Potenz $3n-9$ vor, daher [160] ist die Ecke r ein dreifacher Punct, und [162] die drei Tangenten in diesem Puncte werden durch

$$x_1^2 \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_2^2} = 0$$

dargestellt, so dass zwei derselben mit der Rückkehrtangente $x_1 = 0$ der Curve $u = 0$ zusammenfallen, und die dritte die Gleichung $\frac{\partial^2 v_3}{\partial x_2^2} = 0$ hat. (*Salmon.* H. pl. Cvs. pag. 74.)

166. Bildet eine Gerade einen Theil einer Curve n. O. $u = 0$, so bildet sie auch einen Theil der Hesse'schen Curve $H(u) = 0$.

Beweis. Nimmt man die Gerade zu der Seite $x_1 = 0$

des Fundamentaldreiecks, so kann man die linke Seite der Gleichung der Curve $u = 0$ schreiben

$$u = x_1 v,$$

worin v eine Function $(n - 1)$. O. bedeutet. Dann ist

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = v + x_1 \frac{\partial v}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial u}{\partial x_2} = x_1 \frac{\partial v}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial u}{\partial x_3} = x_1 \frac{\partial v}{\partial x_3},$$

und es wird

$$H(u) = \begin{vmatrix} 2\frac{\partial v}{\partial x_1} + x_1 v_{11}, & \frac{\partial v}{\partial x_2} + x_1 v_{12}, & \frac{\partial v}{\partial x_3} + x_1 v_{13} \\ \frac{\partial v}{\partial x_2} + x_1 v_{12}, & x_1 v_{22}, & x_1 v_{23} \\ \frac{\partial v}{\partial x_3} + x_1 x_{13}, & x_1 v_{32}, & x_1 v_{33} \end{vmatrix}.$$

Zerlegt man diese Determinante nach den Elementen der letzten Columne in zwei Summanden, so erhält man

$$H(u) = \begin{vmatrix} 2\frac{\partial v}{\partial x_1} + x_1 v_{11}, & \frac{\partial v}{\partial x_2} + x_1 v_{12}, & \frac{\partial v}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v}{\partial x_2} + x_1 v_{12}, & x_1 v_{22}, & 0 \\ \frac{\partial v}{\partial x_3} + x_1 v_{13}, & x_1 v_{32}, & 0 \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} 2\frac{\partial v}{\partial x_1} + x_1 v_{11}, & \frac{\partial v}{\partial x_2} + x_1 v_{12}, & x_1 v_{13} \\ \frac{\partial v}{\partial x_2} + x_1 v_{12}, & x_1 v_{22}, & x_1 v_{23} \\ \frac{\partial v}{\partial x_3} + x_1 v_{13}, & x_1 v_{32}, & x_1 v_{33} \end{vmatrix}.$$

Jetzt aber enthält jeder der beiden Summanden den Factor x_1, denn man erhält

$$H(u) = x_1 \left\{ \frac{\partial v}{\partial x_3} \begin{vmatrix} \frac{\partial v}{\partial x_2} + x_1 v_{12}, & v_{22} \\ \frac{\partial v}{\partial x_3} + x_1 v_{13}, & v_{32} \end{vmatrix} \right.$$

$$\left. + \begin{vmatrix} 2\frac{\partial v}{\partial x_1} + x_1 v_{11}, & \frac{\partial v}{\partial x_2} + x_1 v_{12}, & v_{13} \\ \frac{\partial v}{\partial x_2} + x_1 v_{12}, & x_1 v_{22}, & v_{23} \\ \frac{\partial v}{\partial x_3} + x_1 v_{13}, & x_1 v_{32}, & v_{33} \end{vmatrix} \right\},$$

und daher bildet die Gerade $x_1 = 0$ auch einen Theil der Hesse'schen Curve $H(u) = 0$.

167. Wenn eine einfache Curve n. O. δ Doppelpuncte und ϱ Rückkehrpuncte besitzt, so ist die Anzahl ihrer Wendepuncte gleich

$$3n(n-2) - 6\delta - 8\varrho.$$

(*Plücker*. Algebr. Curven. pag. 208.)

Beweis. Wenn die Curve n. O. $u = 0$ keine Doppel- und Rückkehrpuncte hat, so sind [157] ihre Schnittpuncte mit der Hesse'schen Curve zugleich ihre Wendepuncte, und deren Anzahl ist dann $3n(n-2)$ [158]. Kommen aber Doppel- oder Rückkehrpuncte vor, so geht die Hesse'sche Curve auch durch diese [152], [153]; die Anzahl der Wendepuncte ist daher dann um so viel kleiner, als die Anzahl derjenigen Schnittpuncte der Curven $u = 0$ und $H(u) = 0$ beträgt, welche sich in den Doppel- und Rückkehrpuncten befinden. Nun hat die Hesse'sche Curve nicht allein in jedem Doppelpuncte selbst einen Doppelpunct, was vier Schnittpuncte geben würde, sondern beide Curven haben hier auch die Tangenten gemeinschaftlich [164], daher schneidet jeder Zweig der Hesse'schen Curve die Curve $u = 0$ in drei Puncten, und folglich sind in jedem Doppelpuncte 6 Schnittpuncte vereinigt. In einem Rückkehrpuncte hat die Hesse'sche Curve einen dreifachen Punct, und zwei Tangenten fallen mit der Rückkehrtangente zusammen [165], daher schneiden zwei Zweige der Hesse'schen Curve die Curve $u = 0$ jeder in drei, und der dritte in zwei Puncten. Im Ganzen sind daher in jedem Rückkehrpuncte 8 Schnittpuncte vereinigt. Die ursprüngliche Anzahl der Wendepuncte wird daher für jeden Doppelpunct um 6, und für jeden Rückkehrpunct um 8 Einheiten vermindert. (*Salmon*. H. pl. Cvs. pag. 73.)

§. 6.

168. Legt man durch einen festen Punct x als Pol eine Transversale A, welche eine Curve n. O. $u = 0$ in den Puncten $z^{(1)}, z^{(2)}, \ldots z^{(n)}$ schneidet, und ist y irgend ein anderer Punct auf der Transversale A, so soll unter dem Zeichen

$$\sum \left(\frac{yz^{(h)}}{xz^{(h)}}\right)_r,$$

in welchem das Summenzeichen sich auf den oberen Index h bezieht, die Summe der Combinationen r^{ter} Classe, die aus den n Abschnittverhältnissen $\frac{yz^{(h)}}{xz^{(h)}}$ gebildet werden können, verstanden werden. Setzt man nun $yz^{(h)} = xz^{(h)} - xy$, und stellt die Gleichung

$$(1) \qquad \sum \left(\frac{yz^{(h)}}{xz^{(h)}}\right)_r = \sum \left(\frac{xz^{(h)} - xy}{xz^{(h)}}\right)_r = 0$$

auf, so ist diese in Beziehung auf den Abschnitt xy vom r^{ten} Grade, daher giebt es auf der Transversale r Puncte y, welche dieser Gleichung genügen. Jeder dieser Puncte heisst ein harmonisches Centrum vom Grade r für den Pol x und in Bezug auf die n Durchschnitte der Transversale A mit der Curve $u = 0$. (*Jonquières.* Mémoire sur la théorie des poles et polaires. Lionville Journ. 2. Serie, Tome 2. 1857. pag. 266. *Cremona.* art. 11.) Lässt man ferner die Transversale A sich um den Pol x drehen und denkt sich bei jeder Lage derselben die harmonischen Centren r^{ten} Grades bestimmt, so heisst der geometrische Ort derselben die $(n - r)^{te}$ Polare des Poles x in Beziehung auf die Curve $u=0$. (*Grassmann.* Theorie der Centralen. Crelle's Journ. Bd. 24. pag. 276. *Cremona* art. 68.)

169. Die $(n - r)^{te}$ Polare eines Poles x bezüglich einer Curve n. O. $u = 0$ ist eine Curve von der r^{ten} Ordnung, und ihre Gleichung lässt sich bei veränderlichen y_i in den Formen

$$\varDelta_y{}^r(u_x) = 0 \quad \text{oder} \quad \varDelta_x{}^{n-r}(u_y) = 0$$

darstellen.

Beweis. Da jeder der Puncte z mit den Puncten x, y auf der nämlichen Geraden A liegt, so kann man nach [19] setzen

$$z_i = x_i + \lambda y_i \qquad (i = 1, 2, 3),$$

und dann ist

$$(1) \qquad \lambda = k\,\frac{xz}{yz},$$

worin k zwar einen willkürlichen Factor bedeutet, der aber für alle Puncte z den nämlichen Werth haben darf.

Substituirt man diese Coordinaten, da z auf der Curve $u=0$ liegt, in diese Gleichung, so erhält man nach [4]

$$u_x + \lambda\, \Delta_y(u_x) + \frac{\lambda^2}{2!}\Delta_y{}^2(u_x) + \ldots$$
$$+ \frac{\lambda^r}{r!}\Delta_y{}^r(u_x) + \ldots + \frac{\lambda^n}{n!}\Delta_y{}^n(u_x) = 0$$

oder, indem man mit λ^n dividirt,

$$\left(\frac{1}{\lambda}\right)^n u_x + \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{n-1}\Delta_y(u_x) + \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{n-2}\frac{\Delta_y{}^2(u_x)}{2!} + \ldots$$
$$+ \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{n-r}\frac{\Delta_y{}^r(u_x)}{r!} + \ldots + \frac{\Delta_y{}^n(u_x)}{n!} = 0. \qquad (2)$$

Die n Wurzeln λ dieser Gleichung gehören den n Durchschnitten z der Transversale A mit der Curve an. Bezeichnet man denjenigen Werth von λ, welcher dem Puncte $z^{(h)}$ entspricht, mit $\lambda^{(h)}$, so erhält man aus (1)

$$\frac{yz^{(h)}}{xz^{(h)}} = \frac{k}{\lambda^{(h)}},$$

und dadurch geht die Gleichung $\sum\left(\frac{yz^{(h)}}{xz^{(h)}}\right)_r = 0$, welcher die harmonischen Centren y bei jeder Lage der Transversalen A genügen müssen, über in

$$\sum\left(\frac{k}{\lambda^{(h)}}\right)_r = 0,$$

welche sich, da alle Glieder den Factor k^r enthalten, auf

$$\sum\left(\frac{1}{\lambda^{(h)}}\right)_r = 0$$

reducirt. Da aber hierin die n Werthe von $\frac{1}{\lambda^{(h)}}$ die Wurzeln der Gleichung (2) sind, so folgt aus dieser, dass die Coordinaten der Puncte y der Gleichung

$$\Delta_y{}^r(u_x) = 0$$

genügen müssen. Dreht sich nun die Transversale um den Punct x, so stellt die vorige Gleichung bei veränderlichen y, den geometrischen Ort der harmonischen Centren y, also die $(n-r)^{te}$ Polare des Pols x dar. Nach [5] hat man identisch

$$\frac{\Delta_y{}^r(u_x)}{r!} = \frac{\Delta_x{}^{n-r}(u_y)}{(n-r)!},$$

daher kann die $(n-r)^{te}$ Polare des Pols x auch durch $\Delta_x^{n-r}(u_y)=0$ dargestellt werden, welche, wie die vorige Gleichung, in Beziehung auf die veränderlichen y_i von der r^{ten} Ordnung ist. (*Salmon.* H. pl. Cvs. pag. 55.)

170. Die letzte Bemerkung zeigt, dass die Gleichungen

$$\Delta_y^r(u_x)=0, \qquad \Delta_x^{n-r}(u_y)=0$$

nicht allein bei veränderlichen y_i die $(n-r)^{te}$ Polare des Pols x darstellen, sondern dass dieselben Gleichungen bei veränderlichen x_i auch zugleich die r^{te} Polare des Pols y ausdrücken.

171. Unter den verschiedenen Polaren eines Pols x bezüglich einer Curve n. O. $u=0$ sind besonders hervorzuheben: Die $(n-1)^{te}$ Polare, welche eine Gerade ist und daher die gerade Polare heisst. Ihre Gleichung ist bei veränderlichen y_i

$$\Delta_y(u_x)=y_1\frac{\partial u}{\partial x_1}+y_2\frac{\partial u}{\partial x_2}+y_3\frac{\partial u}{\partial x_3}=0.$$

Sodann die $(n-2)^{te}$ Polare, welche ein Kegelschnitt ist und daher die conische Polare heisst. Jhre Gleichung ist bei veränderlichen y_i

$$\Delta_y^2(u_x)=u_{11}y_1^2+u_{22}y_2^2+u_{33}y_3^2+2u_{23}y_2y_3$$
$$+2u_{31}y_3y_1+2u_{12}y_1y_2=0.$$

Ausserdem bemerke man, dass die Gleichung

$$\Delta_y(u_x)=0$$

bei veränderlichen x_i zugleich die erste Polare des Pols y darstellt, welche eine Curve $(n-1)$ O. ist.

172. Liegen zwei Curven n. O. so, dass n Durchschnitte derselben auf einer Geraden A, und n Durchschnitte auf einer anderen Geraden B sich befinden, so ist die gerade Polare des Durchschnittspunctes x der Geraden A und B in Beziehung auf jede der beiden Curven eine und die nämliche Gerade.

Beweis. Die gerade Polare ist nach [168] der geometrische Ort des harmonischen Centrums ersten Grades für den Pol x und in Beziehung auf die n Durchschnitte einer durch x gehenden Transversale mit der Curve. Auf jeder dieser

Transversalen ist aber das harmonische Centrum ersten Grades ein einziger durch die n Durchschnitte und den Pol x vollkommen bestimmter Punct; und, da die gerade Polare eine Gerade ist [171], so ist sie durch zwei Lagen der Transversale bestimmt, indem sie die diesen beiden Lagen zugehörigen harmonischen Centren verbindet. Wenn aber die Transversale mit einer der Geraden A oder B zusammenfällt, so sind ihre Durchschnitte mit der einen Curve die nämlichen wie mit der anderen Curve, daher sind auch auf jeder von beiden Geraden die harmonischen Centren in Bezug auf beide Curven dieselben, und also auch deren Verbindungslinie. (*Salmon.* H. pl. Cvs. pag. 54.)

173. Geht die $(n-r)^{te}$ Polare eines Pols x in Bezug auf eine Curve n. O. $u=0$ durch einen Punct y, so geht die r^{te} Polare des Pols y in Bezug auf dieselbe Curve n. O. durch den Punct x.

Beweis. Bedeuten z_i veränderliche Coordinaten, so ist nach [170]

$$\Delta_z{}^r(u_x)=0 \qquad \text{die } (n-r)^{te} \text{ Polare von } x$$
$$\Delta_z{}^{n-r}(u_y)=0 \qquad \text{die } r^{te} \text{ Polare von } y.$$

Geht die erstere durch den Punct y, so ist $\Delta_y{}^r(u_x)=0$. Nach [5] aber ist identisch

$$\frac{\Delta_y{}^r(u_x)}{r!}=\frac{\Delta_x{}^{n-r}(u_y)}{(n-r)!};$$

wenn also $\Delta_y{}^r(u_x)$ verschwindet, so verschwindet auch $\Delta_x{}^{n-r}(u_y)$, d. h., der Gleichung der r^{ten} Polare von y wird genügt, wenn man die x_i statt der z_i setzt, oder diese Polare geht durch x hindurch.

174. Die r^{te} Polare eines Pols x in Beziehung auf die s^{te} Polare desselben Pols bezüglich einer Curve n. O. $u=0$ ist zugleich die $(r+s)^{te}$ Polare desselben Pols bezüglich der Curve $u=0$.

Beweis. Bei veränderlichen y_i ist $\Delta_x{}^s(u_y)=0$ nach [170] die s^{te} Polare von x bezüglich u. In Bezug auf diese hat die r^{te} Polare von x die Gleichung

$$\Delta_x{}^r(\Delta_x{}^s(u_y))=0.$$

Nach [3] aber ist diese Gleichung identisch mit der folgenden

$$\Delta_x^{r+s}(u_y) = 0,$$

welche die $(r+s)^{te}$ Polare von x darstellt.

175. Die r^{te} Polare eines Pols x in Bezug auf die s^{te} Polare eines Pols x' bezüglich einer Curve n. O. $u=0$ ist identisch mit der s^{ten} Polare von x' in Bezug auf die r^{te} Polare von x bezüglich der Curve $u=0$. — Denn bei veränderlichen y_i wird die erstere durch $\Delta_x^r(\Delta_{x'}^s(u_y))=0$, die letztere durch $\Delta_{x'}^s(\Delta_x^r(u_y))=0$ dargestellt. Nach [3] aber sind diese beiden Gleichungen identisch.

176. Die gerade Polare eines Puncts x, der auf der Curve n. O. $u=0$ liegt, auf welche die Polare sich bezieht, ist die Tangente an dieser Curve im Puncte x. — Denn die Gleichung der geraden Polare von x, welche nach [171] lautet:

$$(1) \qquad y_1\frac{\partial u}{\partial x_1}+y_2\frac{\partial u}{\partial x_2}+y_3\frac{\partial u}{\partial x_3}=0,$$

stellt, wenn x auf der Curve u liegt, nach [149] zugleich die Tangente an u in x dar. (*Salmon*, H. pl. Cvs. pag. 59.)

Ist aber x ein Doppel- oder Rückkehrpunct der Curve u, so ist seine gerade Polare bezüglich u ganz unbestimmt. — Denn für einen solchen Punct x ist nach [150] und [153] $\frac{\partial u}{\partial x_1}=0$, $\frac{\partial u}{\partial x_2}=0$, $\frac{\partial u}{\partial x_3}=0$ und daher die Gleichung (1) für alle Werthe der y_i erfüllt.

177. Liegt ein Punct x auf einer Curve n. O., $u=0$, so gehen die Polaren aller Ordnungen dieses Puncts bezüglich derselben Curve durch den Punct x und berühren die Curve in diesem Puncte.

Beweis. Die r^{te} Polare von x hat [170] bei veränderlichen y_i die Gleichung

$$\Delta_x^r(u_y)=0.$$

Setzt man in dem linken Theile x statt y, so ist [6]

$$\Delta_x^r(u_x)=n(n-1)\ldots(n-r+1)\,u_x,$$

und dies verschwindet, weil x auf der Curve u liegt; daher geht die Polare durch x hindurch. Um ferner die Tangente an der Polare in x zu bestimmen, hat man nach [149], wenn die laufenden Coordinaten der Tangente mit z_i bezeichnet werden, mit dem als Function der y_i zu betrachtenden Aus-

druck $\varDelta_x^r\,(u_y)$ die Operation $\varDelta_z$ vorzunehmen, und dann x statt y zu setzen. Nun ist [2]

$$\frac{\partial}{\partial y_i}\,(\varDelta_x^r\,(u_y)) = \varDelta_x^r\left(\frac{\partial u}{\partial y_i}\right)$$

und daher die Gleichung der Tangente in x an der Polare

$$z_1\,\varDelta_x^r\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right) + z_2\,\varDelta_x^r\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right) + z_3\,\varDelta_x^r\left(\frac{\partial u}{\partial x_3}\right) = 0.$$

Da die Functionen $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ aber homogen vom Grade $n-1$ sind, so ist [6]

$$\varDelta_x^r\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = (n-1)\,(n-2)\,\ldots\,(n-r)\,\frac{\partial u}{\partial x_i},$$

und dadurch verwandelt sich die vorige Gleichung mit Unterdrückung des constanten Factors in

$$z_1\,\frac{\partial u}{\partial x_1} + z_2\,\frac{\partial u}{\partial x_2} + z_3\,\frac{\partial u}{\partial x_3} = 0.$$

Dieses aber ist [149] zugleich die Gleichung der Tangente in x an der Curve $u=0$, und daher haben diese und die Polare in x eine gemeinschaftliche Tangente.

178. Geht die Polare irgend einer Ordnung eines Puncts x in Bezug auf eine Curve n. O. $u=0$ durch diesen Punct x hindurch, so liegt x auf der Curve $u=0$.

Beweis. In diesem Falle wird die Gleichung der r^{ten} Polare $\varDelta_x^r\,(u_y) = 0$ erfüllt, wenn man x statt y setzt; es ist also $\varDelta_x^r\,(u_x)=0$; aber da [6] $\varDelta_x^r\,(u_x) = n\,(n-1)\ldots(n-r+1)\,u_x$ ist, so ist dann auch $u_x = 0$, d. h., x liegt auf u.

179. Hat eine Curve n. O. $u=0$ einen Doppelpunct x, so gehen die ersten Polaren (von der Ordnung $n-1$) aller Puncte der Ebene durch ihn hindurch.

Beweis. Die Gleichung der ersten Polare eines Pols y kann bei veränderlichen x_i nach [171] in der Form

$$y_1\,\frac{\partial u}{\partial x_1} + y_2\,\frac{\partial u}{\partial x_2} + y_3\,\frac{\partial u}{\partial x_3} = 0$$

geschrieben werden. Ist aber x ein Doppelpunct, so ist [150] $\frac{\partial u}{\partial x_1} = 0$, $\frac{\partial u}{\partial x_2} = 0$, $\frac{\partial u}{\partial x_3} = 0$, daher wird die vorige Gleichung für diesen Punct erfüllt, wo auch y liegen mag.

180. Hat die Curve n. O. $u=0$ einen Rückkehrpunct, so gehen die ersten Polaren (von der Ordnung $n-1$) aller

Puncte der Ebene durch ihn hindurch und berühren in ihm die Rückkehrtangente.

Beweis. Legt man die Ecke $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ des Fundamentaldreiecks in den Rückkehrpunct und die Seite $x_1 = 0$ in die Rückkehrtangente, so kann [163] die Gleichung der Curve in der Form

$$u = x_1^2\, x_3^{n-2} + v_3\, x_3^{n-3} + \ldots + v_n = 0$$

geschrieben werden. Daraus folgt

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = 2 x_1\, x_3^{n-2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_1}\, x_3^{n-3} + \ldots$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_2} = \frac{\partial v_3}{\partial x_2}\, x_3^{n-3} + \ldots$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_3} = (n-2)\, x_1^2\, x_3^{n-3} + \ldots$$

Multiplicirt man diese Ausdrücke mit y_1, y_2, y_3 und addirt, so erhält [171] die Gleichung der ersten Polare des Pols y bei veränderlichen x_i die Form

$$2 y_1 x_1\, x_3^{n-2} + V_2\, x_3^{n-3} + \ldots + V_n = 0.$$

Nach [163] geht daher diese Polare, wo auch y liegen mag, durch die Ecke $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ und berührt die Seite $x_1 = 0$. (*Salmon*, H. pl. Cvs. pag. 60.)

181. Die conische Polare eines Doppelpuncts x ist das Tangentenpaar in diesem. Denn die Gleichung der conischen Polare eines Puncts x bei veränderlichen y_i, nämlich $\Delta_y^2(u_x) = 0$ [171], stellt, wenn x ein Doppelpunct ist, nach [151] zugleich das Tangentenpaar in diesem dar.

182. Legt man aus einem Puncte y Tangenten an eine Curve n. O. $u = 0$, so geht die erste Polare des Puncts y durch die Berührungspuncte.

Beweis. Ist x einer der Berührungspuncte, so ist [176] die Tangente in diesem Puncte die gerade Polare von x in Bezug auf u. Da diese durch y geht, so geht [173] die erste Polare von y durch x. Und umgekehrt gilt:

183. Ist x ein Durchschnittspunct der Curve $u = 0$ mit der ersten Polare eines Puncts y, und nicht zugleich ein Doppel- oder Rückkehrpunct der Curve $u = 0$, so geht die Tangente in x an der Letzteren durch y. Ist aber x ein Doppel- oder Rückkehrpunct der Curve $u = 0$, so geht zwar

die erste Polare von y nach [179] und [180] auch durch x, aber die gerade Polare von x ist dann [176] ganz unbestimmt und fällt nicht mit einer der Tangenten in x zusammen. Hieraus folgt:

184. Wenn eine Curve $u = 0$ keine Doppel- oder Rückkehrpuncte besitzt, so sind die Durchschnitte der ersten Polare eines Puncts y mit der Curve $u = 0$ zugleich die Berührungspuncte aller aus y an die Curve $u = 0$ gehenden Tangenten.

185. An eine Curve n. O. $u = 0$, welche keine Doppel- oder Rückkehrpuncte besitzt, können aus einem beliebigen Puncte y der Ebene $n(n-1)$ Tangenten an die Curve gelegt werden. — Denn da die erste Polare jedes Punctes y eine Curve $(n-1)$. O. ist, so schneidet sie die Curve $u = 0$ in $n(n-1)$ Puncten [138].

186. Die Zahl, welche angiebt, wieviel Tangenten aus einem beliebigen Puncte an eine Curve gehen, heisst die Classe der Curve; daher ist eine Curve n^{ter} Ordnung ohne Doppel- und Rückkehrpuncte von der $n(n-1)^{ten}$ Classe.

187. Liegt der Punct y auf der Curve u selbst, so berührt seine erste Polare die erstere in y [177]; es fallen also zwei Durchschnitte beider Curven in y hinein. Man sieht daher die in y stattfindende Tangente an der Curve u als aus zwei zusammenfallenden Tangenten bestehend an. Diese Ansicht ist um so mehr gerechtfertigt, als man eine Curve nicht allein als den geometrischen Ort eines veränderlichen Puncts betrachten kann, sondern auch als die Einhüllende einer veränderlichen Geraden. Alsdann tritt ein Punct der Curve als der Durchschnitt zweier unendlich naher oder zusammenfallender Tangenten auf.*) Demnach:

---

*) Wenn in einer Gleichung des n^{ten} Grades die Variabeln nicht als Punct-, sondern als Liniencoordinaten aufgefasst werden, so stellt die Gleichung eine Curve dar, welche als Einhüllende einer Geraden auftritt und von der n^{ten} Classe ist. Dann folgt ähnlich wie in [138], dass zwei Curven resp. von der m^{ten} und n^{ten} Classe, welche nicht irgend einen Theil mit einander gemein haben, mn gemeinschaftliche Tangenten besitzen. Analoge Betrachtungen, wie die in [149] ff. angestellten, zeigen ferner, dass an die Stelle der Doppelpuncte Doppeltangenten treten, und an die Stelle der Rückkehrpuncte Wendetangenten, sodass

Aus einem Puncte y, welcher auf einer Curve n. O. ohne Doppel- oder Rückkehrpuncte liegt, gehen ausser der in y stattfindenden Tangente noch $n(n-1)-2$ Tangenten an die Curve.

188. Besitzt eine Curve n. O. δ Doppelpuncte und ϱ Rückkehrpuncte, so ist ihre Classe gleich

$$n(n-1)-2\delta-3\varrho.$$

(*Plücker*. Algebr. Curven pag. 208.)

Beweis. Da die erste Polare eines Puncts y durch sämmtliche Doppel- [179] und Rückkehrpuncte [180] geht, ohne dass die Tangenten in diesen Puncten durch y gehen [183], so wird die ursprüngliche Classe $n(n-1)$ der Curve um so viel vermindert, als die Anzahl derjenigen Schnittpuncte beider Curven beträgt, welche sich in den Doppel- und Rückkehrpuncten befinden. In jedem Doppelpuncte aber trifft die Polare die Curve zwei mal, und da in jedem Rückkehrpuncte die Polare zugleich die Rückkehrtangente berührt, so hat sie in einem solchen drei Puncte mit der Curve gemein. Die ursprüngliche Classe wird daher für jeden Doppelpunct um zwei und für jeden Rückkehrpunct um drei Einheiten vermindert.

189. Wenn ein Punct x auf der Hesse'schen Curve einer Curve n. O. $u=0$ liegt, so besteht seine conische Polare allemal aus zwei Geraden, und dies findet auch nur dann statt, wenn x auf der Hesse'schen Curve liegt.

Beweis. In veränderlichen y_i heisst die Gleichung der conischen Polare von x nach [171] $\varDelta_y^2(u_x)=0$. Dieser Kegelschnitt zerfällt aber nach [152] und [84] dann und nur dann in zwei Gerade, wenn die x_i der Gleichung $H(u)=0$ genügen, d. h. wenn x auf der Hesse'schen Curve liegt.

190. Hat die erste Polare eines Punctes y bezüglich

---

letztere bei einer als einer Einhüllenden einer Geraden betrachteten Curve eine specielle Art von Doppeltangenten bilden. An die Stelle eines Wendepunctes endlich tritt eine Rückkehrtangente, sodass der Rückkehrpunct als ein Curvenpunct auftritt, durch welchen drei zusammenfallende Tangenten gehen, die die Curve in dem Rückkehrpuncte berühren. Eine Curve n^{ter} Classe ist im Allgemeinen von der Ordnung $n(n-1)$ und besitzt dann weder Doppel- noch Wendetangenten, dagegen $3n(n-2)$ Rückkehrtangenten.

einer Curve n. O. $u = 0$ einen Doppelpunct, so geht die Hesse'sche Curve $H(u) = 0$ durch diesen hindurch. Und umgekehrt: Jeder Punkt der Hesse'schen Curve ist zugleich für irgend eine erste Polare ein Doppelpunct.

Beweis. In veränderlichen x_i ist die Gleichung der ersten Polare eines Puncts y nach [171]

$$P = y_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + y_3 \frac{\partial u}{\partial x_3} = 0.$$

Ist nun x ein Doppelpunct dieser Curve, so gelten nach [150] die Gleichungen:

$$(1) \qquad \begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x_1} &= u_{11}\, y_1 + u_{21}\, y_2 + u_{31}\, y_3 = 0 \\ \frac{\partial P}{\partial x_2} &= u_{12}\, y_1 + u_{22}\, y_2 + u_{32}\, y_3 = 0 \\ \frac{\partial P}{\partial x_3} &= u_{13}\, y_1 + u_{23}\, y_2 + u_{33}\, y_3 = 0, \end{aligned}$$

und diese können nur mit einander bestehen, wenn $H(u) = 0$ ist, d. h. wenn x auf der Hesse'schen Curve liegt. — Ist umgekehrt x ein Punct der Hesse'schen Curve, so giebt es allemal einen Punct y, für den gleichzeitig die Gleichungen (1) bestehen, für dessen erste Polare also x ein Doppelpunct ist.

191. Die beiden vorigen Sätze lassen sich in folgenden zusammenfassen: Die Hesse'sche Curve einer Curve $u = 0$ ist sowohl der geometrische Ort der Puncte, deren conische Polaren aus zwei Geraden bestehen, als auch der geometrische Ort für die Doppelpuncte der ersten Polaren bezüglich der Curve $u = 0$.

192. Eine beliebige Gerade G hat bezüglich einer Curve n. O., $u = 0$, $(n - 1)^2$ Pole, d. h. es giebt $(n - 1)^2$ Puncte, welche bezüglich der Curve $u = 0$ die Gerade G zur geraden Polare haben.

Beweis. Seien x und x' zwei Puncte der Geraden G, P und P' ihre ersten Polaren bezüglich u. Diese beiden Curven schneiden sich in $(n - 1)^2$ Puncten y. Da nun jeder Punct y sowohl auf P als auch auf P' liegt, so geht die gerade Polare jedes y sowohl durch x, als auch durch x' [173] und fällt daher mit der Geraden G zusammen. (*Salmon*, H. pl. Cvs. pag. 59.)

193. Die ersten Polaren aller Puncte x, welche auf einer beliebigen Geraden G liegen, schneiden sich in den nämlichen $(n-1)^2$ Puncten und bilden also einen Curvenbüschel $(n-1)$. O. [145], dessen Basispuncte die $(n-1)^2$ Pole der Geraden G sind.

Beweis. Ist y einer der $(n-1)^2$ Pole von G, so geht die gerade Polare von y, nämlich G, durch x und daher [173] die erste Polare von x durch y. (*Cremona*, Curve piane art. 77. *Bobillier*, Démonstrations de quelques théorèmes sur les lignes etc. — Annales de Gergonne t. 18. 1827—28. pag. 97.)

194. Die Polaren derselben, der r^{ten}, Ordnung (die $(n-r)^{ten}$ Polaren) eines Puncts a in Bezug auf sämmtliche Curven eines Büschels n^{ter} O. bilden selbst einen Curvenbüschel r^{ter} O.

Beweis. Sind $u = 0$, $v = 0$ zwei Curven des Büschels, so kann jede Curve desselben durch die Gleichung $u + \lambda v = 0$ dargestellt werden [145]. Die $(n-r)^{te}$ Polare eines Puncts a in Beziehung auf diese Curve hat dann [170] die Gleichung

$$\Delta_x^r(u_a) + \lambda \Delta_x^r(u_a) = 0$$

und stellt daher für verschiedene Werthe von λ einen Curvenbüschel r^{ter} Ordnung dar. (*Salmon* H. pl. Cvs. pag. 156).

Zusatz. Für $r = 1$ folgt hieraus: Die geraden Polaren eines Punctes in Beziehung auf die Curven eines Büschels schneiden sich in einem und demselben Puncte.

§. 7.

195. Sind $u = 0$, $v = 0$, $w = 0$ die Gleichungen dreier Curven n. O., welche nicht durch die nämlichen n^2 Puncte gehen, so heisst das System der Curven, welche durch die Gleichung

$$(1) \qquad u + \lambda v + \mu w = 0,$$

worin λ, μ zwei willkürliche Constanten bedeuten, dargestellt werden können, ein Curvennetz n. O., und u, v, w die Leitcurven des Netzes.

196. Man kann unter den Curven eines Netzes drei beliebige, die nicht durch die nämlichen n^2 Puncte gehen, heraus greifen und als Leitcurven annehmen, das Netz bleibt dadurch ungeändert.

Beweis. Sind $\alpha, \beta; \alpha', \beta'; \alpha'', \beta''$ irgend drei Werthepaare von λ, μ, so sind

$$u+\alpha v+\beta w=0,\ u+\alpha' v+\beta' w=0,\ u+\alpha'' v+\beta'' w=0$$

irgend drei Curven des Netzes (1). Nimmt man diese zu Leitcurven eines Netzes, so hat irgend eine Curve desselben die Gleichung

$$u+\alpha v+\beta w+\lambda(u+\alpha' v+\beta' w)+\mu(u+\alpha'' v+\beta'' w)=0;$$

da sich diese aber in der Form

$$(1+\lambda+\mu)u+(\alpha+\lambda\alpha'+\mu\alpha'')v+(\beta+\lambda\beta'+\mu\beta'')w=0$$

schreiben lässt, so ist die durch sie dargestellte Curve auch eine Curve des Netzes (1).

197. Alle Curven eines Netzes n. O., welche durch einen und denselben Punct gehen, bilden einen Curvenbüschel n. O., d. h. sie schneiden sich in den nämlichen n^2 Puncten. Haben aber die drei Leitcurven einen Punct mit einander gemein, so gehen durch diesen alle Curven des Netzes hindurch.

Beweis. Wenn die drei Leitcurven einen Punct mit einander gemein haben, so wird die Gleichung (1) in [195] für diesen Punct erfüllt, welche Werthe auch λ, μ haben mögen, daher gehen alle Curven des Netzes durch diesen Punct hindurch. Ist aber p irgend ein anderer Punct, und sind u', v', w' die Werthe, welche die Functionen u, v, w in p annehmen, so gilt für die Curven, welche durch p gehen, die Gleichung

$$(2) \qquad u'+\lambda v'+\mu w'=0.$$

Eliminirt man aus dieser und aus (1) eine der beiden willkürlichen Constanten, z. B. λ, so erhält man für alle durch p gehenden Curven des Netzes die Gleichung

$$v'u-u'v+\mu(v'w-w'v)=0.$$

Alle diese Curven gehen daher durch die n^2 Durchschnitte der beiden $v'u-u'v=0$ und $v'w-w'v=0$ hindurch. Liegt p in einem Durchschnitte zweier Leitcurven, z. B. u und v, während w nicht durch p geht, so sind u' und v' Null, w' aber von Null verschieden. Dann zeigt die Gleichung (2), dass für alle durch diesen Punct p gehenden Curven $\mu=0$

sein muss, sodass diese Curven durch die Gleichung $u + \lambda v = 0$ dargestellt werden und ebenfalls einen Büschel bilden.

198. Durch zwei gegebene Puncte geht im Allgemeinen nur eine einzige Curve eines Netzes: in dem Falle aber, dass die beiden Puncte zwei Basispuncte eines in dem Netze enthaltenen Curvenbüschels sind, gehen alle Curven dieses Büschels durch die beiden gegebenen Puncte. Gehören endlich beide allen drei Leitcurven an, so folgt aus [197], dass alle Curven des Netzes durch sie hindurch gehen.

Beweis. Sind u', v', w' und u'', v'', w'' die Werthe, welche die Functionen u, v, w in den beiden gegebenen Puncten annehmen, so müssen für die Curven, welche durch beide Puncte gehen, die Gleichungen

$$u' + \lambda v' + \mu w' = 0$$
$$u'' + \lambda v'' + \mu w'' = 0$$

stattfinden. Durch diese erhalten aber λ und μ vollkommen bestimmte Werthe, sodass auch die durch die beiden Puncte gehende Curve des Netzes vollkommen bestimmt ist. Eine Ausnahme tritt nur ein, wenn die beiden letzten Gleichungen von einander abhängig sind, d. h. wenn der Fall eintritt, dass, nachdem λ aus der ersten Gleichung bestimmt ist, die Werthe u'', v'', w'' der zweiten Gleichung für jeden Werth von μ genügen, wenn also die beiden gegebenen Puncte Basispuncte eines Curvenbüschels sind.

199. Die sämmtlichen ersten Polaren (von der Ordnung $n-1$) aller Puncte der Ebene in Bezug auf eine und dieselbe Curve n. O. $u = 0$ bilden ein Curvennetz $(n-1)$. O.

Beweis. Die erste Polare eines Puncts y hat bei veränderlichen x_i nach [171] die Gleichung

$$y_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + y_3 \frac{\partial u}{\partial x_3} = 0.$$

Lässt man den Punct y alle Lagen in der Ebene annehmen, so werden y_1, y_2, y_3 willkürliche Grössen, während die Gleichungen $\frac{\partial u}{\partial x_1} = 0$, $\frac{\partial u}{\partial x_2} = 0$, $\frac{\partial u}{\partial x_3} = 0$ drei Curven $(n-1)$. O. (nämlich die ersten Polaren der Ecken des Fundamentaldreieckes) darstellen. Die vorige Gleichung hat daher die Form der Gleichung (1) in [195].

Fünfter Abschnitt.

Hülfssätze über eine von Steiner aufgestellte Verwandtschaft.*)

§. 1.

200. Hat man einen Kegelschnittbüschel mit den Basispuncten $a\ b\ c\ d$, und bestimmt man für einen beliebigen Punct m die Polaren in Beziehung auf alle Kegelschnitte des Büschels, so schneiden sich diese im Allgemeinen in einem bestimmten Puncte m', dem zu m in Beziehung auf den Kegelschnittbüschel conjugirten Pole [111]. Eine Ausnahme hiervon findet nur dann statt, wenn m zusammenfällt mit einer der drei Ecken $p\ q\ r$ des Dreieckes, welches dem vollständigen Viereck $a\ b\ c\ d$ als Diagonaldreieck angehört; denn dann fallen alle Polaren mit der gegenüberliegenden Seite des Diagonaldreieckes zusammen [107]. Wenn man daher in der Ebene jedem Puncte m den ihm in Beziehung auf den Kegelschnittbüschel conjugirten Pol m' entsprechen lässt, so erhält man eine Verwandtschaft zweier Punctsysteme, bei welcher jedem Puncte eines Systemes im Allgemeinen ein bestimmter Punct des anderen Systemes entspricht, bei welcher jedoch einer Ecke p des Diagonaldreieckes alle Puncte der gegenüberliegenden Seite qr entsprechen. Da zwischen zwei conjugirten Polen in Beziehung auf einen Kegelschnittbüschel Gegenseitigkeit stattfindet, so ist diese Verwandtschaft involutorisch, indem je zwei Puncte der beiden Systeme einander involutorisch entsprechen [41]. Fällt m auf einen der Basispuncte des Büschels z. B. auf a, so fällt auf diesen auch der entsprechende Punct m', denn da die Polaren von a die Tangenten in a an den Kegelschnitten des Büschels sind [99], so ist a ihr gemeinschaftlicher Schnittpunct. Eine derartige Verwandtschaft zweier Punctsysteme soll kurz eine Steinersche Verwandtschaft genannt werden. Eine solche be-

*) *Steiner.* Systematische Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander. Berlin 1832. pag. 254 ff. — *Schröter.* Steiner's Vorlesungen. Leipzig 1867. pag. 316.

zieht sich stets auf einen bestimmten Kegelschnittbüschel, welcher durch seine vier Basispuncte *a b c d* bestimmt ist. Daher sollen diese vier Puncte die Basis der Steiner-schen Verwandtschaft genannt werden. Die Ecken des dem vollständigen Viereck *a b c d* zugehörigen Diagonaldreiecks *p q r* aber mögen die Hauptpuncte der Steiner-schen Verwandtschaft heissen.

201. Aufgabe. Wenn vier Puncte *a b c d* als Basis einer Steiner'schen Verwandtschaft gegeben sind, zu einem gegebenen Puncte *m* den ihm in dieser Verwandtschaft entsprechenden Punct *m'* zu construiren.

Auflösung. Man sucht die Ecken *p q r* des Diagonaldreieckes und verbindet diese mit dem gegebenen Puncte *m*. Alsdann bestimmt man zu jeder dieser Verbindungslinien den zugeordneten harmonischen Strahl in Bezug auf diejenigen zwei Seiten des vollständigen Vierecks *a b c d*, welche in der betreffenden Diagonalecke zusammenstossen. Diese drei Strahlen schneiden sich in dem gesuchten Puncte *m'*. (Man braucht daher nur zwei von ihnen zu construiren). — Denn die erwähnten drei harmonischen Strahlen sind die Polaren des Puncts *m* in Beziehung auf die aus Geradenpaaren bestehenden Kegelschnitte des Büschels, welche von je zwei gegenüberliegenden Seiten des vollständigen Vierecks *a b c d* gebildet werden [95].

Bemerkung. Sind nicht die Ecken *a b c d* des Vierecks, sondern nur die des Dreiecks *p q r* gegeben, so kann man unendlich viele vollständige Vierecke finden, für welche *p q r* das Diagonaldreieck ist, indem man eine Ecke des Vierecks willkürlich annehmen kann [83]. In diesem Falle kann man daher auch auf unendlich viele Arten eine Steiner'sche Verwandtschaft etabliren, indem jedes jener Vierecke *a b c d* als Basis einer solchen Verwandtschaft dienen kann.

202. Wenn ein Punct *x* eine Gerade

$$(1) \qquad m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 = 0$$

durchläuft, so beschreibt der ihm in einer Steiner'schen Verwandtschaft entsprechende Punct *y* einen Kegelschnitt, der durch die Ecken des Diagonaldreiecks *p q r* geht, welches

dem die Basis der Verwandtschaft bildenden Vierecke *abcd* angehört.

Beweis. Das Diagonaldreieck *pqr* ist nach [108] allen Kegelschnitten des Büschels [*abcd*] conjugirt. Nimmt man es als Fundamentaldreieck an, so werden irgend zwei Kegelschnitte dieses Büschels nach [109] durch die Gleichungen

$$a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 = 0 \qquad b_1 x_1^2 + b_2 x_2^2 + b_3 x_3^2 = 0$$

dargestellt. Die Polaren des Puncts x in Bezug auf diese beiden Kegelschnitte haben dann nach [95] in veränderlichen y_i die Gleichungen

$$(2) \qquad \begin{aligned} a_1 y_1 x_1 + a_2 y_2 x_2 + a_3 y_3 x_3 &= 0, \\ b_1 y_1 x_1 + b_2 y_2 x_2 + b_3 y_3 x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Da nun der dem x entsprechende Punct y nach [200] der Durchschnitt dieser beiden Polaren ist, so liefern diese beiden Gleichungen die Coordinaten des Puncts y; und eliminirt man die x_i aus ihnen mit Hülfe der Gleichung (1), so erhält man den geometrischen Ort von y, während x die Gerade (1) durchläuft. Diese Elimination giebt

$$\begin{vmatrix} m_1 & m_2 & m_3 \\ a_1 y_1 & a_2 y_2 & a_3 y_3 \\ b_1 y_1 & b_2 y_2 & b_3 y_3 \end{vmatrix} = 0,$$

oder wenn man der Kürze wegen

$$a_2 b_3 - a_3 b_2 = A_1, \quad a_3 b_1 - a_1 b_3 = A_2, \quad a_1 b_2 - a_2 b_1 = A_3$$

setzt,

$$(3) \qquad m_1 A_1 y_2 y_3 + m_2 A_2 y_3 y_1 + m_3 A_3 y_1 y_2 = 0.$$

Der gesuchte geometrische Ort ist daher [102] ein dem Fundamentaldreieck umschriebener Kegelschnitt.

Zusatz. Geht die Gerade (1) durch eine Ecke des Hauptdreiecks *pqr* z. B. durch die, in welcher die Seiten $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ zusammenstossen, so ist $m_3 = 0$ [77]. Der Kegelschnitt (3) erhält dann die Gleichung

$$y_3 (m_2 A_2 y_1 + m_1 A_1 y_2) = 0$$

und besteht daher aus der der betreffenden Ecke gegenüberliegenden Seite des Dreiecks *pqr* und einer Geraden, welche durch diese Ecke geht. Sieht man daher von der Diagonalseite ab, welche ohnehin nach [200] eine Ausnahmerolle

spielt, so kann man sagen, dass einer durch eine Ecke des Dreiecks pqr gehenden Geraden wiederum eine Gerade entspricht.

203. Hat man statt einer Geraden unendlich viele, welche sich alle in demselben Puncte s schneiden, also einen Strahlbüschel mit dem Scheitel s, so entsprechen ihnen unendlich viele Kegelschnitte, welche alle durch pqr und ausserdem durch den dem Puncte s entsprechenden Punct s' gehn. Also entspricht dem Strahlbüschel $[s]$ ein Kegelschnittbüschel mit den Basispuncten $pqrs'$. Diese beiden Büschel aber sind projectivisch.

Beweis. Sind

$$m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 = 0, \qquad n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 = 0$$

irgend zwei Strahlen des Strahlbüschels, so kann jeder andere Strahl desselben durch die Gleichung

$$m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + \lambda (n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3) = 0$$

dargestellt werden. Man erhält demnach die Gleichung des entsprechenden Kegelschnitts des Kegelschnittbüschels, wenn man in der Gleichung (3) [202]

$$m_i + \lambda n_i \text{ statt } m_i \ (i = 1, 2, 3)$$

setzt. Kegelschnitt und Strahl entsprechen einander also dann, wenn beide demselben Werthe von λ angehören. Mithin [113] ist das Entsprechen ein projectivisches.

204. Beschreibt ein Punct x einen Kegelschnitt, so beschreibt der ihm in einer Steiner'schen Verwandtschaft entsprechende Punct y eine Curve 4. O., welche in den Ecken des Hauptdreiecks pqr drei Doppelpuncte besitzt.

Beweis. Wenn der gegebene Kegelschnitt die Gleichung

$$(1) \qquad \begin{aligned} m_{11} x_1^2 + m_{22} x_2^2 + m_{33} x_3^2 + 2 m_{23} x_2 x_3 \\ + 2 m_{31} x_3 x_1 + 2 m_{12} x_1 x_2 = 0 \end{aligned}$$

hat, so erhält man, indem man ebenso vorgeht, wie in [202], den geometrischen Ort des Puncts y, wenn man mit Hülfe der letzten Gleichung die x_i aus (2) in [202] eliminirt. Diese beiden Gleichungen aber geben

$$x_1 : x_2 : x_3 = A_1 y_2 y_3 : A_2 y_3 y_1 : A_3 y_1 y_2,$$

und substituirt man diese Ausdrücke in (1), so erhält man für den gesuchten geometrischen Ort

$$(2)\quad m_{11}A_1^2y_2^2y_3^2+m_{22}A_2^2y_3^2y_1^2+m_{33}A_3^2y_1^2y_2^2+2m_{23}A_2A_3y_1^2y_2y_3$$
$$+2m_{31}A_3A_1y_1y_2^2y_3+2m_{12}A_1A_2y_1y_2y_3^2=0,$$

also eine Curve 4. O. Da aber diese Gleichung keine der drei Variabeln in einer höheren als der zweiten Potenz enthält, so ist jede der drei Ecken des Fundamentaldreiecks pqr ein Doppelpunct der Curve 4. O. [160].

Zusatz. Ist der gegebene Kegelschnitt dem Dreieck pqr umschrieben, sodass $m_{11}=m_{22}=m_{33}=0$ ist [102], so verwandelt sich die Gleichung (2) in folgende

$$y_1y_2y_3(m_{23}A_2A_3y_1+m_{31}A_3A_1y_2+m_{12}A_1A_2y_3)=0.$$

In diesem Falle besteht also die Curve 4. O. aus den drei Seiten des Dreiecks pqr und einer vierten Geraden. Lässt man nun die ersteren wieder ausser Betracht, so kann man als Umkehrung von [202] sagen: Einem dem Dreieck pqr umschriebenen Kegelschnitte entspricht eine Gerade, und folgert dann ebenso wie in [203]:

Einem Kegelschnittbüschel, welcher pqr und irgend einen vierten Punct s zu Basispuncten hat, entspricht ein Strahlbüschel, dessen Scheitel der dem Puncte s entsprechende Punct s' ist; und diese beiden Büschel sind projectivisch.

205. Wenn ein Punct x eine Curve n. O. durchläuft, so beschreibt der ihm in einer Steiner'schen Verwandtschaft entsprechende Punct y eine Curve von der Ordnung $2n$, welche in jedem der drei Hauptpuncte pqr einen n-fachen Punct besitzt.

Beweis. Ordnet man die Gleichung der gegebenen Curve n. O. nach Potenzen von x_3, so kann man sie in folgender Form schreiben

$$(1)\quad \sum_0^n{}_h\Big(a_{0h}\,x_1^h+a_{1h}\,x_1^{h-1}\,x_2+\ldots$$
$$+a_{h-1,h}\,x_1\,x_2^{h-1}+a_{hh}x_2^h\Big)x_3^{n-h}=0.$$

Nimmt man nun das Hauptdreieck pqr zum Fundamentaldreieck an, so erhält man, wie in [204], die Gleichung der entsprechenden Curve, wenn man statt x_1, x_2, x_3 die Ausdrücke

$$x_1:x_2:x_3=A_1y_2y_3:A_2y_3y_1:A_3y_1y_2$$

substituirt. Dadurch wird die Gleichung der entsprechenden

Curve, wenn man die neu auftretenden Coefficienten, den früheren a_{ik} entsprechend, mit b_{ik} bezeichnet, folgende:

$$\sum_0^n {}_h \Big(b_{0h}\, y_2^h\, y_3^h + b_{1h}\, y_1\, y_2^{h-1}\, y_3^h + \dots$$
$$+ b_{h-1,h}\, y_1^{h-1}\, y_2\, y_3^h + b_{hh}\, y_1^h\, y_3^h\Big)\, y_1^{n-h}\, y_2^{n-h} = 0.$$

Ordnet man diese nach Potenzen von y_3, so erhält man

$$\sum_0^n {}_h \Big(b_{0h}\, y_1^{n-h}\, y_2^n + b_{1h}\, y_1^{n-h+1}\, y_2^{n-1} + \dots$$
$$+ b_{h-1,h}\, y_1^{n-1}\, y_2^{n-h+1} + b_{hh}\, y_1^n\, y_2^{n-h}\Big)\, y_3^h = 0$$

oder ausgeschrieben

$$(2)\quad \begin{cases} b_{00}\, y_1^n\, y_2^n + (b_{01}\, y_1^{n-1}\, y_2^n + b_{11}\, y_1^n\, y_2^{n-1})\, y_3 \\ + (b_{02}\, y_1^{n-2}\, y_2^n + b_{12}\, y_1^{n-1}\, y_2^{n-1} + b_{22}\, y_1^n\, y_2^{n-2})\, y_3^2 \\ + \dots \\ + (b_{0n} y_2^n + b_{1n} y_1 y_2^{n-1} + \dots + b_{n-1,n} y_1^{n-1} y_2 + b_{nn} y_1^n) y_3^n = 0. \end{cases}$$

Diese Curve ist also von der Ordnung $2n$, aber keine der Variabeln kommt in einer höheren Potenz vor als in der n^{ten}; daher sind die Ecken des Fundamentaldreiecks (die Hauptpuncte) n-fache Puncte. [160].

206. Wenn die Curve n. O. durch die Hauptpuncte hindurchgeht, so reducirt sich die entsprechende Curve $2n$. O. auf die Seiten des Hauptdreiecks und eine Curve von der Ordnung $2n-3$, welche in jedem Hauptpuncte einen $(n-2)$-fachen Punct besitzt.

Beweis. Da die Curve in diesem Falle durch die Ecken des Fundamentaldreieckes geht, so ist [160] in der Gleichung (1) in [205] $a_{00} = a_{0n} = a_{nn} = 0$ zu setzen, wodurch auch $b_{00} = b_{0n} = b_{nn} = 0$ wird. Dadurch erhalten alle Glieder der Gleichung (2) den Factor $y_1\, y_2\, y_3$, und nach Absonderung desselben bleibt folgende Gleichung übrig

$$\begin{aligned} & b_{01}\, y_1^{n-2}\, y_2^{n-1} + b_{11}\, y_1^{n-1}\, y_2^{n-2} \\ & + (b_{02}\, y_1^{n-3}\, y_2^{n-1} + b_{12}\, y_1^{n-2}\, y_2^{n-2} + b_{22}\, y_1^{n-1}\, y_2^{n-3})\, y_3 \\ & + \dots \\ & + (b_{1n}\, y_2^{n-2} + b_{2n}\, y_1\, y_2^{n-3} + \dots + b_{n-1,n}\, y_1^{n-2})\, y_3^{n-1} = 0. \end{aligned}$$

Diese Gleichung ist von der Ordnung $2n-3$, aber die höchste Potenz der Variabeln ist $n-1$, daher [160] ist jeder Haupt-

punct ein vielfacher Punct vom Grade $2n-3-(n-1)$, also ein $(n-2)$-facher Punct.

Zusatz. Einer Curve 3. O. ($n=3$) entspricht daher im Allgemeinen eine Curve 6. O. Geht aber die erstere durch die Hauptpuncte, so entspricht ihr, wenn man die Seiten des Hauptdreiecks unberücksichtigt lässt, wieder eine Curve 3. O., welche auch durch die Hauptpuncte geht und diese zu einfachen Puncten hat.

207. Wenn eine Curve n. O. keine Doppelpuncte besitzt, so hat die ihr entsprechende Curve $2n$. O. ausser den in den Ecken des Hauptdreiecks befindlichen vielfachen Puncten keine weiteren Doppelpuncte. — Denn ein Doppelpunct der Curve $2n$. O. müsste dann gleichzeitig zweien verschiedenen Puncten der Curve n. O. entsprechen. Dies ist aber nur möglich, wenn diese letzteren Puncte auf einer der Seiten des Hauptdreiecks liegen, und dann ist der ihnen entsprechende Doppelpunct eben die gegenüberliegende Ecke des Hauptdreiecks. Wenn daher eine durch die Hauptpuncte gehende Curve 3. O. keine Doppelpuncte hat, so hat die ihr nach [206] entsprechende Curve 3. O. ebenfalls keine Doppelpuncte.

§. 2.

208. Aufgabe: Wenn ein Strahlbüschel mit vier Strahlen $m\,(a, b, c, d)$, vier Puncte 1 2 3 4, und ausserdem drei Basispuncte pqr eines Kegelschnittbüschels gegeben sind, so soll man den geometrischen Ort eines Puncts x so bestimmen, dass, wenn derselbe als vierter Basispunct des Kegelschnittbüschels genommen wird, die durch die Puncte 1 2 3 4 gehenden Kegelschnitte dieses Büschels der Reihe nach den Strahlen $m\,(a, b, c, d)$ projectivisch entsprechen; in Zeichen, dass

$$(1) \qquad [pqrx]\,(1, 2, 3, 4) \;\overline{\wedge}\; m\,(a, b, c, d)$$

sei.

Auflösung. Betrachtet man $p\,q\,r$ als Diagonalpuncte irgend eines vollständigen Vierecks, so kann man dieses als Basis für eine Steiner'sche Verwandtschaft festsetzen. In dieser seien $1', 2', 3', 4'$ die entsprechenden Puncte zu $1, 2, 3, 4$, und x' der entsprechende Punct zu x. Dann entspricht dem

Kegelschnittbüschel $[pqrx]$ (1, 2, 3, 4) nach [204] der Strahlbüschel x' (1′, 2′, 3′, 4′), und zwar projectivisch. Es ist also

$$[pqrx]\,(1, 2, 3, 4) \;\overline{\wedge}\; x'\,(1', 2', 3', 4').$$

Demnach wird die Forderung (1) erfüllt, wenn x' so bestimmt wird, dass

$$x'\,(1', 2', 3', 4') \;\overline{\wedge}\; m\,(a, b, c, d)$$

wird. Der geometrische Ort des dieser Forderung Genüge leistenden Punctes x' aber kann nach [129] bestimmt werden, und zwar folgendermassen: Entspricht in einem Strahlbüschel mit dem Scheitel 1′ der Strahl $1't$ dem Strahle ma, so dass

$$1'\,(t, 2', 3', 4') \;\overline{\wedge}\; m\,(a, b, c, d)$$

ist, so ist der geometrische Ort des Punctes x' ein Kegelschnitt, welcher durch 1′ 2′ 3′ 4′ geht und die Gerade $1'\,t$ in 1′ berührt. Diesem Kegelschnitte entspricht in der Steiner'schen Verwandtschaft nach [204] eine Curve 4. O., welche pqr zu Doppelpuncten hat und durch 1 2 3 4 geht; diese Curve 4. O. ist daher der gesuchte geometrische Ort des Punctes x. (*Kortum.* Ueber geometrische Aufgaben dritten und vierten Grades. Bonn 1869. pag. 39.)

209. Aufgabe. Wenn ein Strahlbüschel mit fünf Strahlen $m\,(a, b, c, d, e)$, fünf Puncte 1, 2, 3, 4, 5, und ausserdem drei Basispuncte pqr eines Kegelschnittbüschels gegeben sind, so soll man den vierten Basispunct x des Letzteren so bestimmen, dass die durch die Puncte 1, 2, 3, 4, 5 gehenden Kegelschnitte des Büschels den Strahlen $m\,(a, b, c, d, e)$ der Reihe nach projectivisch entsprechen; in Zeichen, dass

$$(1) \qquad [pqrx]\,(1, 2, 3, 4, 5) \;\overline{\wedge}\; m\,(a, b, c, d, e)$$

sei.

Auflösung. Die Puncte x, welche der Forderung

$$[pqrx]\,(1, 3, 4, 5) \;\overline{\wedge}\; m\,(a, c, d, e)$$

genügen, erfüllen nach [208] eine Curve 4. O., C, die p, q, r zu Doppelpuncten hat und durch 1 3 4 5 geht. Ebenso erfüllen die Puncte x, für welche

$$[pqrx]\,(2, 3, 4, 5) \;\overline{\wedge}\; m\,(b, c, d, e)$$

ist, eine zweite Curve 4. O., C', welche ebenfalls in $p\,q\,r$ drei Doppelpuncte besitzt und durch 2 3 4 5 geht. Der

Punct x, welcher der Forderung (1) genügt, muss also ein Durchschnitt der beiden Curven C und C' sein. Aber diese Curven haben gemeinschaftlich die einfachen Puncte 3 4 5 und die Doppelpuncte $p\ q\ r$, also da in jedem der letzteren vier Durchschnitte vereinigt sind, im Ganzen fünfzehn Puncte. Der gesuchte Punct x ist also der sechszehnte Durchschnitt der beiden Curven C und C'. Um diesen Punct zu finden, wähle man irgend ein vollständiges Viereck, für welches $p\ q\ r$ die Diagonalpuncte sind, als Basis für eine Steiner'sche Verwandtschaft und bestimme in dieser die entsprechenden Puncte 1' 2' 3' 4' 5' zu 1 2 3 4 5. Dann entspricht nach [208] der Curve C der Kegelschnitt K, welcher durch 1' 3' 4' 5' geht und in 1' die Tangente $1'\,t$ hat, wenn

$$1'\,(t, 3', 4', 5') \;\overline{\wedge}\; m\,(a, c, d, e)$$

ist. Der Curve C' aber entspricht ein Kegelschnitt K', der durch 2' 3' 4' 5' geht und in 2' die Tangente $2'\,s$ hat, die so construirt ist, dass $2'\,(s, 3', 4', 5') \;\overline{\wedge}\; m\,(b\ c\ d\ e)$ ist. Der letzte Durchschnitt x von C und C' entspricht daher dem vierten Durchschnitt x' der Kegelschnitte K und K', die die drei Puncte 3' 4' 5' gemeinsam haben.

Man hat hiernach zur Bestimmung des Punctes x folgende Constructionen auszuführen. Man construirt nach [83] irgend ein vollständiges Viereck so, dass $p\ q\ r$ dessen Diagonalpuncte werden, und nimmt dieses Viereck als Basis für eine Steiner'sche Verwandtschaft. In dieser construirt man nach [201] die zu 1 2 3 4 5 entsprechenden Puncte 1' 2' 3' 4' 5'. Sodann bestimmt man nach [91] die Strahlen $1't$ und $2's$ so, dass

$$1'\,(t, 3', 4', 5') \;\overline{\wedge}\; m\,(a, c, d, e)$$
$$2'\,(s, 3', 4', 5') \;\overline{\wedge}\; m\,(b, c, d, e)$$

ist. Nun construirt man nach [124] den vierten Durchschnitt x' der Kegelschnitte K und K', welche die Puncte 3' 4' 5' gemeinsam haben, und von denen der erste ausserdem durch den Punct 1' und die Tangente $1't$, der zweite durch den Punct 2' und die Tangente $2's$ bestimmt ist. Endlich construirt man den zu x' in der Steiner'schen Verwandtschaft entsprechenden Punct x, so ist dies der verlangte. (*Kortum.* l. c. [208] pag. 43.)

Zweite Abtheilung.

Curven dritter Ordnung.

Erster Abschnitt.

Einleitende Sätze.

210. Bedeutet u entweder eine ganze rationale Function dritter Ordnung von zwei Parallel-Coordinaten oder eine ebensolche homogene Function von drei homogenen Punctcoordinaten, so ist die durch die Gleichung $u = 0$ dargestellte Curve eine Curve dritter Ordnung.

211. Eine Curve dritter Ordnung ist entweder eine einfache Curve [133], oder sie besteht aus einer Geraden und einem Kegelschnitte, oder sie besteht endlich aus drei Geraden, von denen auch zwei oder alle drei zusammenfallen können.

212. Eine Gerade, welche nicht einen Theil einer Curve 3. O. bildet, schneidet diese in drei Puncten [134]. Von diesen können zwei zusammenfallen, dann ist die Gerade entweder eine Tangente an der Curve, oder sie trifft die Curve in einem Doppelpuncte. Es können auch alle drei Schnittpuncte zusammenfallen, dann ist die Gerade entweder eine Tangente in einem Doppelpuncte, oder sie ist eine Wendetangente, und der Durchschnittspunct ein Wendepunct. Von den drei Schnittpuncten der Geraden mit der Curve können zwei imaginär sein, einer aber ist stets reell [135].

213. Wenn eine Gerade mit einer Curve 3. O. mehr als drei Puncte gemein hat, so bildet sie einen Theil der Letzteren [137].

214. Eine Gerade, welche eine Curve 3. O. in einem Puncte a berührt, schneidet dieselbe ausserdem in einem Puncte a', da sie drei Puncte mit jener gemein hat. Dieser Punct heisst der Tangentialpunct zugehörig zu dem Berührungspuncte. (*Salmon.* On Curves of the 3d order. Phil. Trans. vol. 148. pag. 535. *Cremona.* Cve piane. art. 39. b.) Zieht man in a' auf's Neue eine

Tangente an die Curve, so gehört zu a' wieder ein Tangentialpunct a''; dieser heisst der zweite Tangentialpunct zu a. Der zu diesem zugehörige Tangentialpunct a''' heisst der dritte Tangentialpunct von a, u. s. f. (*Salmon* l. c. pag. 537. *Cremona.* Cve piane. art. 67. c. d.)

215. Wenn eine Curve 3. O. nicht einen Theil einer Curve n. O. bildet, und wenn beide Curven nicht eine Gerade oder einen Kegelschnitt mit einander gemein haben, so schneiden sie einander in $3n$ Puncten, zwei solche Curven 3. O. also in 9 Puncten [138]. Wenn k von diesen Durchschnittspuncten in einen einzigen zusammenfallen, der nicht für eine der beiden Curven ein Doppel- oder mehrfacher Punct ist, so sagt man, dass die beiden Curven eine k-punctige Berührung mit einander eingehen.

216. Eine einfache Curve 3. O. kann höchstens einen Doppelpunct [oder Rückkehrpunct] haben [154]. Besteht sie aber aus einer Geraden und einem Kegelschnitt, so hat sie zwei Doppelpuncte, nämlich die beiden Durchschnittspuncte; und besteht sie aus drei Geraden, so hat sie drei Doppelpuncte, nämlich die drei Durchschnitte der Geraden.

217. Hat eine Curve 3. O. einen dreifachen Punct k, so besteht sie aus drei in diesem Puncte zusammenlaufenden Geraden. — Denn nimmt man auf der Curve irgendwo einen Punct a an, so hat die Gerade ka vier Puncte mit der Curve gemein und bildet daher [213] einen Theil der Curve. (*Cremona.* Cve piane. art. 31.)

218. Zur Bestimmung einer Curve 3. O. sind neun Puncte erforderlich und in der Regel auch hinreichend [142]. Sind aber neun Puncte die Durchschnitte zweier Curven 3. O., so gehen unendlich viele Curven 3. O. durch sie hindurch, welche einen Curvenbüschel 3. O. bilden [144].

219. Alle Curven 3. O., welche durch acht beliebig gegebene Puncte gehen, haben auch noch einen neunten Punct gemeinschaftlich, bilden also einen Curvenbüschel 3. O. [143.]

220. Wenn von den neun Durschschnitten zweier Curven 3. O. drei auf einer Geraden liegen, so liegen die übrigen sechs auf einem Kegelschnitt; und umgekehrt: Liegen sechs auf einem Kegelschnitt, so liegen die übrigen drei in gerader Linie [148].

221. Von diesem Satze ist das *Pascal*'sche Theorem [87] ein specieller Fall. Denn sind 1, 2, 3, 4, 5, 6 sechs beliebige Puncte eines Kegelschnitts, so bilden die drei Geraden 12, 34, 56 eine Curve 3. O., ebenso auch die Geraden 23, 45, 61. Diese beiden Curven 3. O. schneiden sich in den neun Puncten

$$(12,\ 23) = 2 \quad (34,\ 23) = 3 \quad (56,\ 23) = k$$
$$(12,\ 45) = h \quad (34,\ 45) = 4 \quad (56,\ 45) = 5$$
$$(12,\ 61) = 1 \quad (34,\ 61) = l \quad (56,\ 61) = 6.$$

Von diesen liegen 1, 2, 3, 4, 5, 6 auf einem Kegelschnitte, also die drei übrigen h, k, l auf einer Geraden. (*Salmon.* H. pl. Cvs. pag. 23.)

222. Wenn von neun Puncten einer Curve 3. O. drei in einer Geraden und die übrigen sechs auf einem Kegelschnitte liegen, so kann man unendlich viele Curven 3. O. durch diese neun Puncte legen. — Aus [218]; denn die Gerade und der Kegelschnitt bilden eine zweite Curve 3. O.

223. Liegen von neun Puncten in der Ebene drei in einer Geraden, die übrigen sechs aber nicht auf einem Kegelschnitt; oder: liegen sechs auf einem Kegelschnitt, die übrigen drei aber nicht in einer Geraden, so geht nur eine einzige Curve 3. O. durch die gegebenen neun Puncte. — Denn liesse sich mehr als eine Curve 3. *O.* durch sie hindurch legen, so könnten nach [220] die obigen Voraussetzungen nicht stattfinden.

224. Liegen von den neun Durchschnitten zweier Curven 3. O. zwei Mal drei in je einer Geraden, so liegen auch die letzten drei in einer Geraden. — Aus [220], da die beiden ersten Geraden zusammen einen Kegelschnitt bilden.

225. Zieht man aus den Durchschnitten a, a', a'' einer Geraden mit einer Curve 3. O. Secanten $abc, a'b'c', a''b''c''$, so liegen die sechs Durchschnitte $bc, b'c', b''c''$ derselben mit der Curve auf einem Kegelschnitt. (*Poncelet.* Analyse des Transversales. Crelle's Journ. Bd. 8. pag. 129.)

Beweis. Die drei Secanten bilden eine zweite Curve 3. O., deren Durchschnitte mit der gegebenen die neun Puncte $abc, a'b'c', a''b''c''$ sind. Da drei von diesen a, a', a'' in einer Geraden liegen, so liegen die sechs übrigen nach [220] auf einem Kegelschnitt.

226. Gehen die Secanten bc, $b'c'$, $b''c''$ in Tangenten über, so folgt: Zieht man aus drei in gerader Linie liegenden Curvenpuncten $a\ a'\ a''$ irgend drei Tangenten an die Curve, so wird diese in den drei Berührungspuncten von einem Kegelschnitte berührt. — Es ist aber sehr beachtenswerth, dass dieser Kegelschnitt auch in zwei zusammenfallende Gerade degeneriren kann. (Vgl. [383, 542]).

227. Ebenso folgt umgekehrt: Liegen sechs Puncte einer Curve 3. O. $bcb'c'b''c''$ auf einem Kegelschnitt, und verbindet man dieselben paarweise durch gerade Linien z. B. bc, $b'c'$, $b''c''$, welche die Curve auf's Neue in $aa'a''$ schneiden, so liegen die drei letzteren Puncte in einer Geraden. (*Poncelet* l. c. [225] pag. 129.)

228. Fällt von den drei Punctepaaren bc, $b'c'$, $b''c''$ jedes in einen Punct zusammen, so folgt: Wenn ein Kegelschnitt eine Curve 3. O. in drei Puncten $bb'b''$ berührt, so liegen deren drei Tangentialpuncte $aa'a''$ in gerader Linie.

229. Sind a, a', a'' drei in gerader Linie liegende Puncte einer Curve 3. O.; b, b', b'' ebenfalls, und schneiden die Verbindungsgeraden ab, $a'b'$, $a''b''$ die Curve in c, c', c''; so liegen diese drei Puncte auch in gerader Linie.

Beweis. Die Geraden abc, $a'b'c'$, $a''b''c''$ bilden eine Curve 3. O., welche diese neun Puncte mit der gegebenen gemeinschaftlich hat. Von diesen neun Durchschnittspuncten liegen zwei Mal drei $aa'a''$ und $bb'b''$ in je einer Geraden, also [224] auch die letzten drei.

230. Liegen drei Puncte a, a', a'' einer Curve 3. O. in einer Geraden G, so liegen die ihnen zugehörigen Tangentialpuncte c, c', c'' ebenfalls in einer Geraden G'. (*Maclaurin.* De linearum geometricarum proprietatibus, übers. v. *Jonquières* in Mélanges de géometrie pure. pag. 223.) — Denn lässt man in [229] die beiden Geraden $aa'a''$ und $bb'b''$ zusammenfallen, so werden die Secanten abc, $a'b'c'$, $a''b''c''$ zu Tangenten, und die Puncte c, c', c'' die Tangentialpuncte zu resp. a, a', a''.

Die Gerade G' heisst die Begleiterin der Geraden G, und der Durchschnitt dieser beiden Geraden der die Gerade G begleitende Punct. (*Cayley.* Memoir on Curves of the third order. Phil. Trans. vol. 147. pag. 416. „satellite line, satellite point."

Cremona. Cve. piane. art. 39. b. „retta satellite, punto satellite.“ *Curtze* übersetzt: beigeordnete Gerade, beigeordneter Punct. pag. 57.)

231. Die Puncte, in welchen die drei Asymptoten einer Curve 3. O. diese schneiden, liegen in gerader Linie. (*Poncelet* l. c. [225] pag. 130.) — Denn die Berührungspuncte der Asymptoten liegen auf der unendlich fernen Geraden [16], und die Asymptotendurchschnitte sind die Tangentialpuncte dieser unendlich fernen Berührungspuncte [230].

232. Sind a, a', a'' die Schnitte einer Geraden mit einer Curve 3. O., und zieht man aus einem Puncte c der Letzteren die Geraden ca, ca', ca'', welche die Curve auf's Neue in b, b', b'' schneiden, so hat der Kegelschnitt, welcher durch b, b', b'' geht und die Tangente der Curve in c hier berührt, in diesem Puncte eine dreipunctige Berührung mit der Curve. (*Poncelet.* Analyse des Transversales. Crelle's Journ. Bd. 8. pag. 134.)

Beweis. Hält man die drei in gerader Linie liegenden Puncte a, a', a'' fest, substituirt aber statt des einen Curvenpunctes c drei solche c, c', c'', und lässt die Puncte b, b', b'', durch die Schnitte der Geraden ca, $c'a'$, $c''a''$ mit der Curve entstehn, so liegen $cc'c''bb'b''$ auf einem Kegelschnitte [225]. Lässt man nun die Puncte $cc'c''$ in einen c zusammenfallen, so fallen in c drei Puncte des Kegelschnitts mit drei Curvenpuncten zusammen. (*Cremona.* Cve. piane art. 39. d.)

233. Geht eine Curve 3. O. u durch die Ecken 1, 2, 3, 4, 5, 6 eines Sechsecks und ausserdem durch die Durchschnitte zweier Paare gegenüberliegender Seiten z. B. $(12, 45) = h$, $(23, 56) = k$, so geht sie auch durch den Durchschnitt $(34, 61) = l$ des dritten Seitenpaares.

Beweis. Die Geraden 12, 34, 56 bilden eine Curve 3. O., ebenso 23, 45, 61. Diese zwei Curven schneiden sich in den neun Puncten $2, h, 1$; $3, 4, l$; $k, 5, 6$. Die Curve u geht durch acht von diesen, nämlich $1, 2, 3, 4, 5, 6, h, k$, also [219] auch durch den neunten l. (*Poncelet.* Analyse des Transversales. Crelle's Journ. Bd. 8. pag. 132. *Cremona.* Cve. piane art. 45. c.)

Bemerkung. Besteht u aus einem Kegelschnitt und einer Geraden, und liegen 1, 2, 3, 4, 5, 6 auf dem Kegelschnitt und h, k auf der Geraden, so folgt wieder das *Pascal'*-sche Theorem [87], denn da der Kegelschnitt mit einer Curve 3. O. nicht sieben Puncte gemein haben kann, so kann der

neunte Punct l, der auf u liegen muss, nicht auf dem Kegelschnitt, sondern muss auf der Geraden hk liegen. (*Cremona.* Cve. piane. art. 45. c.)

234. Zieht man in den sechs Puncten, in welchen ein Kegelschnitt eine Curve 3. O. schneidet, Tangenten an die Curve, so liegen die sechs Puncte, in denen diese Tangenten die Curve schneiden (die Tangentialpuncte der sechs Berührungspuncte [230]) auf einem neuen Kegelschnitt. (*Cremona* art. 45. b.)

Beweis. S. [248.]

235. Wenn ein Kegelschnitt mit einer Curve 3. O. in einem Puncte a eine fünfpunctige Berührung hat, und die Curve in b schneidet, so schneidet derjenige Kegelschnitt, welcher die Curve in dem zu a zugehörigen Tangentialpuncte a' fünfpunctig berührt, die Curve in dem zu b zugehörigen Tangentialpuncte b'.

Beweis. Fallen in [234] fünf Schnittpuncte des ersten Kegelschnittes in a zusammen, so fallen auch fünf Tangenten zusammen und daher auch die fünf zugehörigen Tangentialpuncte, und zwar diese nach a'. Demnach hat auch der zweite Kegelschnitt in a' eine fünfpunctige Berührung mit der Curve. Der sechste Punct des ersten Kegelschnitts aber ist b, und der des zweiten der zu b gehörige Tangentialpunct b'. (*Cremona.* Cve. piane. art. 67. e.)

Zweiter Abschnitt.

Erzeugung der Curven dritter Ordnung.

§. 1.

236. Wenn ein Strahlbüschel und ein Kegelschnittbüschel zu einander projectivisch sind [113], so ist der geometrische Ort der Durchschnitte jedes Strahls mit dem ihm entsprechenden Kegelschnitte eine Curve 3. O,, welche durch den Mittelpunct des Strahlbüschels und die vier Basispuncte des Kegelschnittbüschels hindurchgeht.

Beweis. Bedeuten $A = 0$, $A' = 0$ zwei Gerade, $K = 0$,

$K' = 0$ zwei Kegelschnitte, und λ einen veränderlichen Parameter, so stellt [57]

$$A + \lambda A' = 0$$

einen Strahlbüschel, und [105]

$$K + \lambda K' = 0$$

einen Kegelschnittbüschel dar. Von diesen sind ein Strahl und ein Kegelschnitt projectivisch entsprechend, wenn ihnen der gleiche Werth von λ zugehört [113]; man erhält daher den geometrischen Ort der Durchschnitte entsprechender Strahlen und Kegelschnitte, wenn man λ aus den beiden letzten Gleichungen eliminirt. Dadurch erhält man die Gleichung

$$AK' - A'K = 0,$$

welche eine Curve 3. O. darstellt. Diese wird erfüllt, wenn gleichzeitig $A = 0$ und $A' = 0$ ist, daher geht die Curve durch den Mittelpunct des Strahlbüschels, ferner auch, wenn gleichzeitig $K = 0$ und $K' = 0$ ist, daher geht die Curve auch durch die Basispuncte des Kegelschnittbüschels.

237. Wenn eine Curve 3. O. durch einen Strahlbüschel mit dem Mittelpuncte m und einen Kegelschnittbüschel mit den Basispuncten $a\ b\ c\ d$ nach [236] erzeugt ist, so entspricht der Kegelschnitt, welcher durch m geht, demjenigen Strahle, welcher die Curve 3. O. in m berührt.

Beweis. Der durch m gehende Kegelschnitt hat ausser den Basispuncten $a\ b\ c\ d$ den Punct m und noch einen sechsten Punct e mit der Curve gemein, der entsprechende von m ausgehende Strahl geht daher durch m und e und hat also in m zwei Puncte mit der Curve gemein.

238. Der Strahl, welcher durch einen Basispunct a des Kegelschnittbüschels geht, entspricht demjenigen Kegelschnitte, welcher die Curve 3. O. in a berührt.

Beweis. Der durch a gehende Strahl schneidet die Curve 3. O. in a und in einem dritten Puncte f. Der entsprechende Kegelschnitt geht daher ausser durch die Basispuncte $a\ b\ c\ d$ noch durch a und f, hat also in a zwei Puncte mit der Curve gemein.

239. Wenn auf einer gegebene Curve 3. O. vier Puncte $a\ b\ c\ d$ beliebig gegeben sind, so kann man dieselben stets

als die Basispuncte eines Kegelschnittbüschels annehmen, welcher mit einem Strahlbüschel, dessen Mittelpunct m ebenfalls auf der Curve liegt, die letztere nach [236] erzeugt. Oder: Legt man durch vier beliebige feste Puncte $a\ b\ c\ d$ einer Curve 3. O. einen variablen Kegelschnitt, welcher die Curve in n, p, schneidet, so geht die variable Gerade $n\,p$ durch einen festen Punct m der Curve. Dieser Punct m heisst der den vier Puncten $a\ b\ c\ d$ gegenüberliegende Punct. (*Salmon* pag. 133. *Cremona* art. 65.)

Beweis 1. Legt man durch $abcd$ einen beliebigen Kegelschnitt, schneidet damit die Curve in n, p, und mit der Geraden $n\,p$ in m, so muss, wenn es möglich sein soll, die gegebene Curve durch den Kegelschnittbüschel $[abcd]$ und einen projectivischen Strahlbüschel zu erzeugen, m der Mittelpunct des Letzteren sein. Nun kann man zur Feztsetzung der Projectivität noch zwei Strahlen und zwei Kegelschnitte beliebig annehmen [113, 61, 35]. Diese aber sind bestimmt, wenn man noch zwei Puncte n' und n'' auf der Curve annimmt und durch jeden einen Strahl und zugleich den entsprechenden Kegelschnitt gehen lässt. Dann ist zu jedem Kegelschnitt der projectivisch entsprechende Strahl bestimmt, und umgekehrt. Zugleich aber ist durch die neun Puncte $abcdnpmn'n''$ auch die Curve 3. O. eindeutig bestimmt; denn sollen durch die Puncte n', n'' wirklich noch zwei Strahleu gehen, so dürfen $n'\,n''$ nicht mit m in gerader Linie liegen, und da nun $a\ b\ c\ d\ n\ p$ auf einem Kegelschnitte sich befinden, so ist nach [223] durch obige neun Puncte nur eine Curve 3. O. möglich. Demnach ist der Punct m in der That der Mittelpunct des Strahlbüschels, welcher mit dem Kegelschnittbüschel $[a\ b\ c\ d]$ gerade die gegebene Curve 3. O. und keine andere erzeugt.

Beweis 2. Bedeuten A, B, C, D, E, F lineare Ausdrücke, und k eine Constante, so kann die Gleichung jeder Curve 3. O. auf unendlich viele Arten in die Form

$$A\,C\,E = k\,B\,D\,F$$

gebracht werden, weil diese Gleichung 13 Constanten enthält (jeder der linearen Ausdrücke A, B, etc. enthält zwei unabhängige Constanten), während die Gleichung einer Curve 3. O. schon durch 9 Constanten bestimmt ist. Wählt man nun die

Geraden A, B, C, D so, dass vier ihrer Durchschnitte die Puncte a, b, c, d sind, nämlich

$$(AB) = a, \quad (AD) = b, \quad (CB) = c, \quad (CD) = d^{*}),$$

und setzt ausserdem

$$(EF) = m,$$

so geht die durch die vorige Gleichung dargestellte Curve durch diese Puncte hindurch. Nun wird aber ein durch $a\ b\ c\ d$ gehender Kegelschnittbüschel durch

$$AC = \lambda\ BD$$

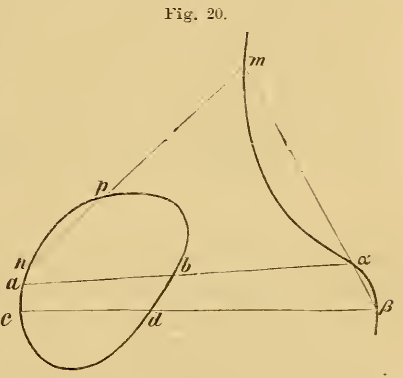
dargestellt, wenn λ einen veränderlichen Parameter bedeutet. Die Puncte, welche irgend einer dieser Kegelschnitte mit der Curve ausser $a\ b\ c\ d$ noch gemeinsam hat, müssen daher der Gleichung

$$E = \frac{k}{\lambda}\ F$$

genügen und liegen daher stets auf einer durch $(EF) = m$ gehenden Geraden. (*Salmon.* pag. 133.)

Beweis 3. (Fig. 20.) Man ziehe die Geraden ab, cd, und schneide damit die Curve in α und β. Sei ferner m der Punct, in welchem die Gerade $\alpha\beta$ die Curve schneidet. Legt man nun durch $abcd$ einen beliebigen Kegelschnitt, bezeichnet mit n einen der weiteren Durchschnitte desselben mit der Curve, und schneidet endlich die Curve mit der Geraden nm in p, so hat man drei in gerader Linie liegende Curvenpuncte α, β, m, von welchen resp. die Secanten αab, βcd, mnp ausgehen. Nach [225] liegen daher $ab\ cd\ np$ auf einem Kegelschnitte. Demnach ist p,

Fig. 20.



*) Dies ist immer möglich, denn nachdem hierdurch vier Puncte und gleichzeitig acht Constanten bestimmt sind, kann man die übrigen fünf Constanten so bestimmen, dass die Curve noch durch weitere fünf Puncte geht.

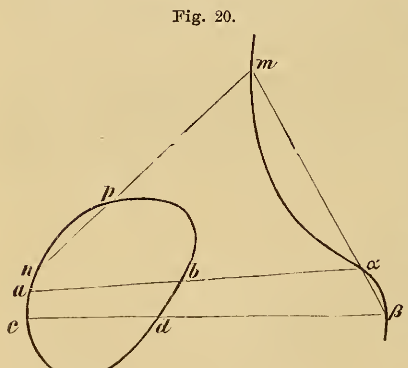
welcher der Annahme nach mit *nm* in einer Geraden liegt, der sechste Durchschnitt der Curve mit dem durch *a b c d n* gelegten Kegelschnitte, und die Gerade *np* geht durch *m*. Da aber *ab, cd* und also auch α, β fest bleiben, so ändert auch *m* sich nicht, wenn man den durch *a b c d* gehenden Kegelschnitt variirt.

240. Aufgabe. Zu vier gegebenen Puncten *abcd* einer gegebenen Curve 3. O. den gegenüberliegenden Punct *m* zu construiren. (Fig. 20.)

Auflösung. Man schneide die Curve mit den Geraden *ab, cd* in α, β, und mit der Geraden $\alpha\beta$ in *m*, so ist *m* der verlangte Punct. — Denn die Geraden *a b, c d* bilden einen Kegelschnitt des Büschels [*a b c d*] [239, oder unmittelbar aus Beweis 3.]

241. Fallen von den vier Puncten *a b c d* je zwei zusammen, z. B. *ac* in *a*, und *bd* in *b*, so ist der gegenüberliegende Punct *m* der Tangentialpunct desjenigen Punctes α, in welchem die Gerade *ab* die Curve trifft. (Fig. 20.) — Denn dann fällt die Gerade *cd* auf *ab*, also auch β auf α, und die Secante $\alpha\beta$ wird zur Tangente in α.

Fig. 20.

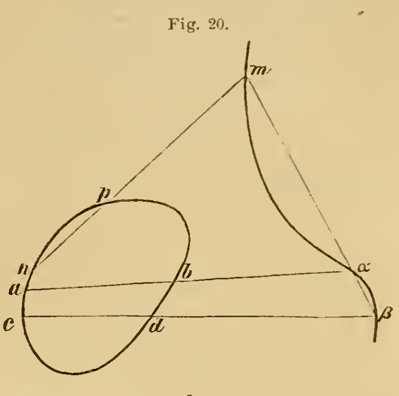


242. Wenn ein Kegelschnitt eine Curve 3. O. in einem Puncte *a* vierpunctig berührt, so ist der diesen vier zusammenfallenden Puncten gegenüberliegende Punct *m* der zweite Tangentialpunct [214] von *a*. Oder: Jeder Kegelschnitt, der eine Curve 3. O. in einem Puncte *a* vierpunctig berührt, schneidet die Curve in zwei Puncten *n*, *p*, deren Verbindungslinie durch den zweiten Tangentialpunct von *a* geht. (*Salmon.* On curves of the third order. Phil. Trans. vol. 148. pag. 537.) — Denn lässt man in [241] die vier Puncte *a b c d* in einen *a* zusammenfallen (Fig. 20), so fallen die Geraden *a b* und *c d* beide in die Tangente in *a*. Demnach fallen auch die Puncte α, β zusammen und zwar in

den Tangentialpunct von α. Dadurch wird dann die Gerade $\alpha\,\beta\,m$ die Tangente der Curve in α, und folglich m der Tangentialpunct von α oder der zweite Tangentialpunct von a. (*Cremona.* art. 67 c.)

243. Hat ein Kegelschnitt mit einer Curve 3. O. in einem Puncte a eine fünfpunctige Berührung, so liegt der sechste Durchschnittspunct beider auf der Geraden, welche a mit dem zweiten Tangentialpuncte von a verbindet. — Aus [242], (Fig. 20), denn wenn auch noch n mit a zusammenfällt, so geht die Gerade npm in apm über. (*Poncelet* l. c. [225] pag. 135. *Cremona* art. 67. c.)

Fig. 20.



244. Nimmt man auf einer Curve 3. O. drei Puncte $a\,b\,c$ und einen vierten m beliebig aber fest an, und zieht durch m einen variablen Strahl, welcher die Curve in $n\,p$ schneidet, so trifft der durch die festen Puncte $a\,b\,c$ und durch n, p gelegte variable Kegelschnitt die Curve in einem festen Puncte d. Oder: Man kann den Punct m stets als Mittelpunct eines Strahlbüschels ansehen, der mit einem Kegelschnittbüschel, von welchem $a\,b\,c$ drei Basispuncte sind, die gegebene Curve erzeugt; der vierte Basispunct ist dann der Punct d.

Beweis 1. Wenn es möglich sein soll, die Curve durch einen Strahlbüschel $[m]$ und einen Kegelschnittbüschel, von welchem $a\,b\,c$ drei Basispuncte sind, zu erzeugen, so muss der auf die angegebene Art bestimmte Punct d der vierte Basispunct des Kegelschnittbüschels sein. Verfährt man nun ebenso wie in [239. Bew. 1], so wird durch die Annahme zweier weiterer Curvenpuncte n', n'' gleichzeitig die Projectivität der beiden Büschel und die Curve 3. O. eindeutig bestimmt, sodass durch den Strahlbüschel $[m]$ und den Kegelschnittbüschel $[a\,b\,c\,d]$ gerade die gegebene Curve 3. O. erzeugt wird. Demnach ist d wirklich der vierte Basispunct, und daher ein fester Punct der Curve.

Beweis 2. Stellt man die Curve, wie in [239] durch die Gleichung

$$ACE = kBDF$$

dar, indem man die gegebenen Puncte als die Durchschnitte

$$(AB) = a, \quad (AD) = b, \quad (CB) = c, \quad (EF) = m$$

annimmt, so hat jede durch m gehende Gerade die Gleichung

$$E = \lambda F.$$

Die Durchschnitte derselben mit der Curve müssen dann der Gleichung

$$AC = \frac{k}{\lambda} BD$$

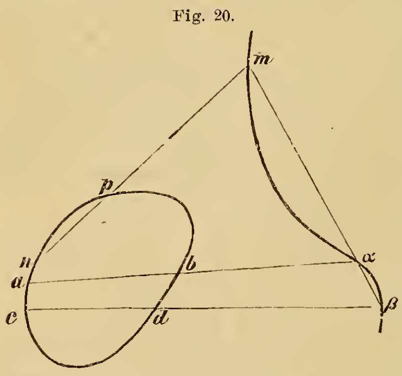
genügen und daher auf einem Kegelschnitte liegen, der nicht bloss durch die Puncte $(AB) = a$, $(AD) = b$, $(CB) = c$, sondern auch durch den festen Punct

$$(CD) = d$$

hindurch geht.

Beweis 3. (Fig. 20.) Schneidet man die Curve mit ab in α, mit αm in β, mit βc in d und legt durch m einen beliebigen Strahl, der die Curve in n, p trifft, so hat man drei in gerader Linie liegende Curvenpuncte m, α, β, von welchen die Secanten mnp, αab, βcd ausgehen, daher [225] liegen $np\ ab\ cd$ auf einem Kegelschnitt. Demnach ist d der Punct, in welchem der durch $abcnp$ gehende Kegelschnitt die Curve zum sechsten Male trifft. Aber mit abc und m bleiben auch α, β, d ungeändert; daher bleibt d ein fester Punct, wenn man den Strahl mnp variirt.

Fig. 20.



Zusatz. Der vier Curvenpuncten $a\ b\ c\ d$ gegenüberliegende Punct m hat demnach die Eigenschaft, dass jeder durch $a\ b\ c\ d$ gehende Kegelschnitt die Curve in zwei Puncten $n\ p$ trifft, welche mit m in einer Geraden liegen [239], und dass

jede durch m gehende Gerade die Curve in zwei Puncten n, p trifft, die mit $a\ b\ c\ d$ in einem Kegelschnitte liegen.

245. Sind $a\ b\ \alpha$ drei Puncte einer Curve 3. O. in gerader Linie, und zieht man durch den Tangentialpunct m eines derselben, z. B. α, eine Gerade $m\ n\ p$, so schneidet diese die Curve in zwei Puncten n, p, welche auf einem Kegelschnitte liegen, der die Curve in den beiden anderen Puncten a und b berührt.

Beweis 1. (Fig. 20.) Dieser Satz entsteht aus dem vorigen, wenn man c mit a, und β mit α zusammenfallen lässt, wodurch m der Tangentialpunct von α wird. Dann fällt auch d mit b zusammen, und der durch $a\ b\ c\ d\ n\ p$ gehende Kegelschnitt verwandelt sich in einen, welcher durch n, p geht und die Curve in a und b berührt. (*Cremona.* art. 150.)

Beweis 2. Bedeuten A, B, C, D, F lineare Ausdrücke, und k eine Constante, so kann die Gleichung einer Curve 3. O. auf unendlich viele Arten in die Form

$$ABC = kD^2F$$

gebracht werden, weil diese Gleichung 11 Constanten enthält. Dann trifft jede der Geraden A, B, C die Curve da, wo diese von zwei mit D zusammenfallenden Geraden getroffen wird, und ausserdem da, wo die Gerade F die Curve schneidet. Also sind A, B, C drei Tangenten der Curve, deren Berührungspuncte $(AD) = a$, $(BD) = b$, $(CD) = \alpha$ auf der Geraden D liegen. Die Tangentialpuncte (AF), (BF), (CF) dieser Berührungspuncte aber liegen auf der Geraden F, welche daher die Begleiterin der Geraden D ist [230]. Sei $m = (CF)$ der Tangentialpunct von α. Legt man durch diesen eine beliebige Gerade $C = \lambda F$, so erhält man für die Durchschnitte derselben mit der Curve die Gleichung

$$AB = \frac{k}{\lambda} D^2.$$

Diese liegen daher auf einem Kegelschnitte, welcher die Geraden A und B in den Puncten $(AD) = a$ und $(BD) = b$ berührt. (Vgl. [131]). (*Salmon.* pag. 160.)

246. Lässt man im Vorigen die Puncte n und p zusammenfallen, also im Allgemeinen die Secante mnp in eine

Tangente übergehen, so wird man auf einen mit [226] zusammenhängenden Satz geführt, nämlich: Sind $a\ b\ \alpha$ drei Curvenpuncte in gerader Linie, und zieht man aus dem Tangentialpuncte m eines derselben, z. B. α, eine von $m\ \alpha$ verschiedene Tangente $m\ n$ an die Curve, so wird diese in den drei Puncten a, b und n von einem Kegelschnitte berührt. (Vgl. [383, 542.])

Bemerkung. Das Zusammenfallen der Puncte n, p kann auch dadurch entstehen, dass ein Doppelpunct existirt, und die Gerade $m\ n$ durch ihn hindurch geht. Dann liegt derselbe auch auf dem die Curve in a und b berührenden Kegelschnitte.

247. Sind $a\ b\ c\ d$ vier beliebige Curvenpuncte, m ihr gegenüberliegender Punct, und $a'\ b'\ c'\ d'\ m'$ die Tangentialpuncte der vorhergehenden, so ist m' der gegenüberliegende zu $a'\ b'\ c'\ d'$.

Beweis, Schneiden die Geraden $a\ b$ und $c\ d$ die Curve in α und β, so liegen $\alpha\ \beta\ m$ in gerader Linie [240]. Sind aber α' und β' die Tangentialpuncte von α und β, so liegen auch $a'\ b'\ \alpha'$ und $c'\ d'\ \beta'$ in je einer Geraden [230] d. h. α' und β' sind die Schnitte der Geraden $a'\ b'$ und $c'\ d'$ mit der Curve. Der gegenüberliegende zu $a'\ b'\ c'\ d'$ muss nun nach [240] mit α', β' in einer Geraden liegen; aber da $\alpha\ \beta\ m$ eine Gerade bilden, so liegen auch $\alpha'\ \beta'\ m'$ in einer Geraden, und daher ist m' dieser gegenüberliegende Punct. (Mittheilung von Herrn Prof. *Küpper*.)

248. Schneidet ein Kegelschnitt eine Curve 3. O. in den sechs Puncten $a\ b\ c\ d\ e\ f$, so liegen die Tangentialpuncte $a'\ b'\ c'\ d'\ e'\ f'$ der letzteren auf einem neuen Kegelschnitte. (*Cremona.* art. 45. b.)

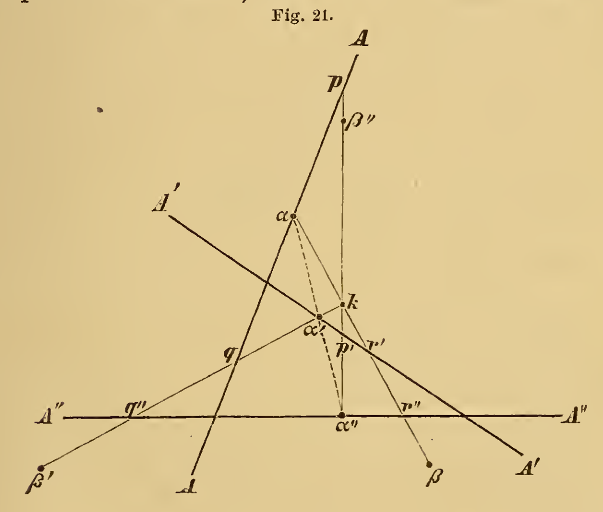
Beweis. Sind m und m' die gegenüberliegenden Puncte zu resp. $a\ b\ c\ d$ und $a'\ b'\ c'\ d'$, so ist nach [247] m' gleichzeitig der Tangentialpunct von m. Da nun $m\ e\ f$ in gerader Linie liegen [239], so liegen auch $m'\ e'\ f'$ in einer Geraden [230], und folglich geht der durch $a'\ b'\ c'\ d'\ e'$ gelegte Kegelschnitt auch durch f'. [244. Zus.].

§. 2.

249. Aufgabe. Eine Curve 3. O. nach folgenden Daten zu construiren. Gegeben seien drei Puncte der Curve in gerader Linie $a\ a'\ a''$, die Tangenten $A\ A'\ A''$ in diesen, die Tangentialpuncte α, α' von a, a' und irgend ein neunter Punkt k.

Auflösung. Der Tangentialpunct α'' von a'' ist als Durchschnitt von $\alpha\alpha'$ mit A'' ebenfalls bekannt [230]. Zieht man αk und sucht nach [89] den Schnittpunct β dieser Geraden mit einem Kegelschnitte, der durch k geht und A', A'' in a', a'' berührt, so ist β nach [245] ein Punct der Curve. Ebenso findet man einen zweiten Curvenpunct β' als Durchschnitt der Geraden $\alpha' k$ mit einem Kegelschnitte, welcher durch k geht und A, A'' in a, a'' berührt; und einen dritten Curvenpunct β'' als Durchschnitt von $\alpha'' k$ mit einem Kegelschnitte, der durch k geht und A, A' in a, a' berührt. Indem man jeden dieser Puncte β, β', β'' an Stelle von k treten lässt, kann man das Verfahren wiederholen und sich so viele Curvenpuncte verschaffen, als man will. (*Salmon.* pag. 160.)

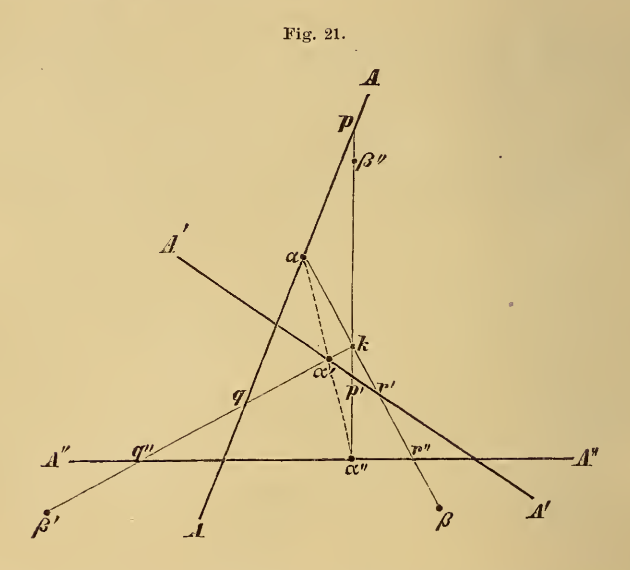
Fig. 21.



250. Aufgabe. Eine Curve 3. O., welche drei reelle Asymptoten hat, nach folgenden Daten zu construiren. Gegeben sind die drei Asymptoten A, A', A'', die in gerader Linie [231] liegenden Durchschnitte α, α', α'' derselben mit der Curve, und ausserdem ein Curvenpunct k. (Fig. 21.)

Auflösung. Man ziehe durch k und den einen der drei Asymptotendurchschnitte, z. B. α, eine Gerade und schneide damit die beiden anderen Asymptoten A', A'' in r', r''. Macht man dann auf dieser Geraden $kr' = r''\beta$, so ist β ein neuer Curvenpunct. Ebenso findet man einen zweiten Curvenpunct β', wenn man die Asymptoten A, A'' mit $\alpha' k$ in q, q'' schneidet und $kq = q''\beta'$ macht, und endlich einen dritten β'', indem man A, A' mit $\alpha'' k$ in p, p' schneidet und $kp = p'\beta''$ macht. Lässt man dann jeden der drei gefundenen Puncte $\beta\ \beta'\ \beta''$ an Stelle von k treten, so kann man sich so viele Curvenpuncte verschaffen, als man will. (*Plücker.* System der anal. Geom. pag. 167.)

Fig. 21.

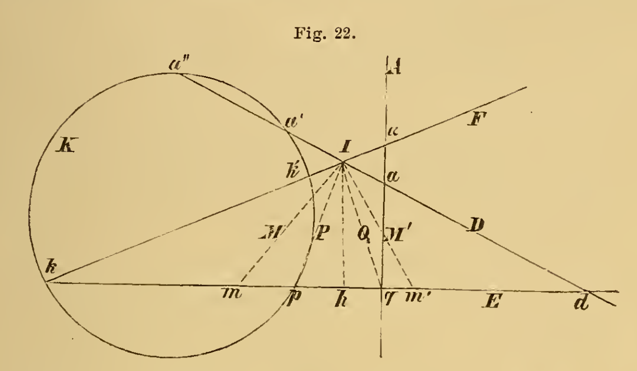


Beweis. In diesem Falle liegen die Berührungspuncte der Tangenten $A\ A'\ A''$ auf der unendlich fernen Geraden, und die Tangentialpuncte der unendlich fernen Berührungspuncte sind die Asymptotendurchschnitte $\alpha\ \alpha'\ \alpha''$. Da nun nach [245] eine durch k und etwa α gezogene Gerade die Curve in einem Kegelschnitt schneidet, welcher durch k geht und die Tangenten $A'\ A''$ in deren Berührungspuncten berührt, so muss hier dieser Kegelschnitt eine Hyperbel sein, welche $A'\ A''$ zu ihren Asymptoten hat. Schneidet aber eine Gerade

eine Hyperbel in k, β und deren Asymptoten in r', r'', so ist $kr' = r''\beta$.

251. (Fig. 22.) Seien a, a', a'' drei in einer Geraden D liegende Curvenpuncte. Man lege in einem derselben, etwa in a, eine Tangente A an die Curve und durch die beiden anderen a', a'' einen Kegelschnitt K, welcher die Curve in a' und a'' berührt, sodass die Durchschnitte α, k, k' von A und K mit der Curve ebenfalls in einer Geraden F liegen [241]. Zieht man nun durch einen der beiden Durchschnitte des Kegelschnittes K mit der Curve, etwa durch k, eine beliebige Gerade E, und schneidet mit dieser den Kegelschnitt K in p, die Tangente A in q, die Gerade D in d, endlich die Curve in m und m', so ist der in Beziehung auf p, q zu d zugeordnete harmonische Punct h auch in Beziehung auf m und m' zu d harmonisch zugeordnet.

Fig. 22.



B e w e i s. Bezeichnet man mit $A = 0$, $D = 0$, $F = 0$, $K = 0$ die Gleichungen der mit denselben Buchstaben bezeichneten Linien, so hat im vorliegenden Falle die Gleichung der Curve die Form

$$AK - D^2F = 0,$$

da D durch die Berührungspuncte von A und K mit der Curve, und F durch die übrigen Durchschnitte geht. Diese Form kann die Curvengleichung immer annehmen, da man über 11 Constanten verfügen kann. Nun nehme man die Geraden E, F, D der Reihe nach zu den Seiten $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ $x_3 = 0$ des Fundamentaldreiecks und setze

$$A = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3$$
$$K = a x_1^2 + b x_2^2 + c x_2 x_3 + d x_3 x_1 + e x_1 x_2,$$

indem das Glied x_3^2 in dem Polynom K fehlen muss, weil dieser Kegelschnitt durch die Fundamentalecke $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ hindurch geht. Die Gleichung der Curve heisst nun

$$AK - x_2 x_3^2 = 0.$$

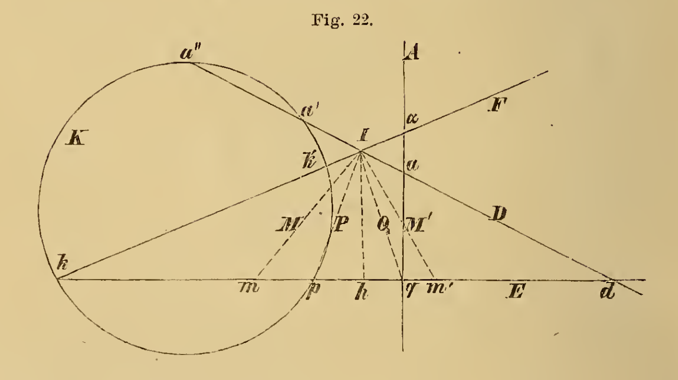
Setzt man darin $x_1 = 0$, so erhält man die Gleichung

$$x_2 \left[(a_2 x_2 + a_3 x_3)(b x_2 + c x_3) - x_3^2\right] = 0,$$

welche die von der Ecke I ($x_2 = 0$, $x_3 = 0$) nach den Puncten k, m, m' gehenden Geraden F, M, M' darstellt. Ebenso erhält man die Gleichungen der von I nach k, p, q gehenden Geraden F, P, Q, wenn man $x_1 = 0$ setzt in der Gleichung $A \cdot K = 0$, also

$$x_2 (a_2 x_2 + a_3 x_3)(b x_2 + c x_3) = 0.$$

Fig. 22.



Da nun $x_2 = 0$ die Gerade F darstellt, so ist

$$M . M' = (a_2 x_2 + a_3 x_3)(b x_2 + c x_3) - x_3^2$$
$$P . Q = (a_2 x_2 + a_3 x_3)(b x_2 + c x_3)$$

und daher

$$M . M' = P . Q - x_3^2.$$

Bezeichnet man nun noch mit y den Strahl Ih, wo h harmonisch zugeordnet ist zu d in Bezug auf p in q, so kann man setzen [59]

$$P = y + \lambda x_3 \qquad Q' = y - \lambda x_3.$$

Daraus folgt

$$P.Q = y^2 - \lambda^2 x_3^2 \text{ und daher } M.M' = y^2 - (\lambda^2 + 1)\, x_3^2;$$

mithin ist

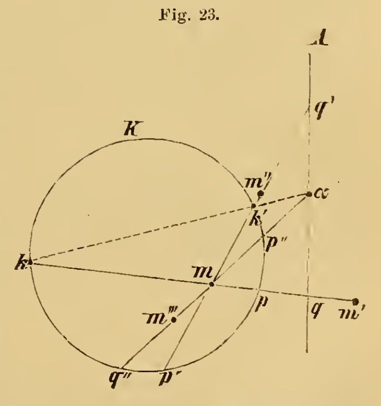
$$M = y + \sqrt{\lambda^2 + 1}\,.\,x_3 \qquad M' = y - \sqrt{\lambda^2 + 1}\,.\,x_3$$

d. h. h und d sind auch harmonisch zugeordnet in Beziehung auf m und m'.

252. (Fig. 22.) Ist A eine Asymptote einer Curve 3. O. und zwar die reelle, wenn nur eine solche vorhanden ist, K ein Kegelschnitt, der die beiden anderen Asymptoten der Curve zu seinen eigenen Asymptoten hat, schneiden ferner A und K die Curve in α, k, k', und zieht man durch einen der Puncte k oder k', z. B. durch k, eine beliebige Gerade, welche K und A in p und q, die Curve aber in m und m' schneide, so ist die Mitte von pq zugleich die Mitte von mm', oder es ist $mp = qm'$. — Denn lässt man in [251] die Gerade D, welche durch die Berührungspuncte von A und K mit der Curve geht, ins Unendliche rücken, so rückt auch d ins Unendliche, und daher fällt h gleichzeitig in die Mitte von pq und von mm'.

253. Aufgabe. (Fig. 23.) Eine Curve 3. O., welche nur eine reelle Asymptote hat, nach folgenden Daten zu construiren. Gegeben sei: die reelle Asymptote A, nebst ihrem Durchschnitt α mit der Curve; eine Ellipse K, deren imaginäre Asymptoten die der Curve seien, sowie ihre Durchschnitte k, k' mit der Curve (nach [241] müssen $\alpha\, k\, k'$ in gerader Linie liegend angenommen werden); sodann noch irgend ein Curvenpunct m.

Fig. 23.

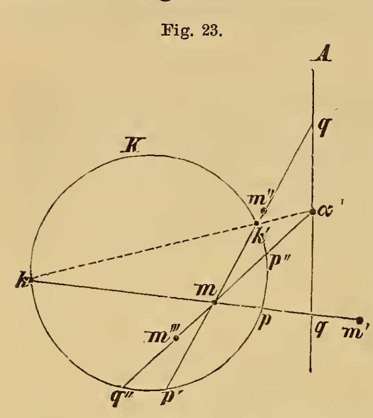


Auflösung. Man ziehe durch m und k, k', α drei Gerade; schneide K, A mit km in p, q und mache $qm' = mp$; mit

$k'm$ in p', q' und mache $q'm'' = mp'$; schneide endlich K mit αm in p'', q'' und mache $q''m''' = mp''$, so sind m' m'' m''' drei neue Curvenpuncte. Lässt man diese nach und nach an Stelle von m treten und wiederholt die Construction, so kann man sich so viele Puncte verschaffen als man will. (*Plücker*. System d. anal. Geom. pag. 172)

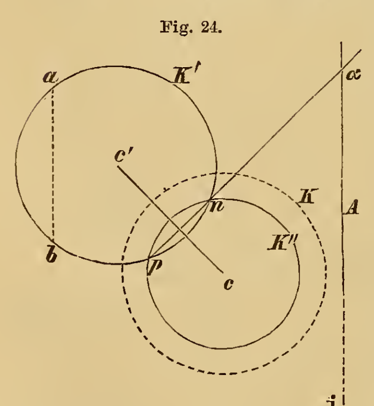
Beweis. Für die aus k und k' gezogenen Geraden km und $k'm$ folgt die Construction der auf ihnen liegenden Curvenpuncte m' und m'' unmittelbar aus [252]. Der auf der Geraden αm liegende Curvenpunct m''' aber muss nach [245] auf einem Kegelschnitte liegen, der durch m geht, und die imaginären Asymptoten der Curve zu seinen eigenen Asymptoten hat. Dieser Kegelschnitt ist also eine mit K concentrische, ähnliche und ähnlich liegende Ellipse (S. u. a. *Salmon*. Anal. Geometrie der Kegelschnitte, deutsch von *Fiedler*. 2. Aufl. art. 276.) Alsdann aber muss $q''m''' = mp''$ sein.

Fig. 23.



254. Aufgabe (Fig. 24.) Eine Curve 3. O. nach folgenden Daten zu construiren: Gegeben sei eine reelle Asymptote A nebst ihrem Durchschnitte α mit der Curve; zwei Curvenpuncte a, b, deren Verbindungslinie zu A parallel sei, und dann ein Kegelschnitt K, der die beiden anderen Asymptoten A', A'' der Curve zu seinen eigenen Asymptoten habe. (Sind die letzteren reell, so kann man sie selbst statt des Kegelschnitts K als gegeben betrachten, sind sie aber imaginär, so nimmt man eine beliebige Ellipse K als gegeben an, deren Mittelpunct c dann

Fig. 24.



den Durchschnitt der beiden Asymptoten bildet. Uebrigens braucht von dieser Ellipse nur der Mittelpunct c, die Richtung der Axen und das Axenverhältniss bekannt zu sein.)

Auflösung. Man lege durch a, b irgend einen Kegelschnitt K', der zu K ähnlich und ähnlich liegend ist, verbinde dessen Mittelpunct c' mit c, und ziehe aus α eine Gerade, deren Richtung zu dem Durchmesser cc' conjugirt ist; dann schneidet diese Gerade den Kegelschnitt K' in zwei Curvenpuncten n, p. Indem man den durch a, b gelegten zu K ähnlichen und ähnlich liegenden Kegelschnitt K' variirt, kann man sich so viele Curvenpuncte verschaffen, als man will.

Beweis. Bezeichnet man mit i, i', i'' die unendlich fernen Puncte der Asymptoten A, A', A'', so ist α der gegenüberliegende Punct zu i', i'', wenn man in jedem der letzteren zwei Puncte vereinigt denkt [241]. Daher liegen die Puncte n, p, in welchen eine durch α gehende Gerade die Curve schneidet, in einem Kegelschnitte K'', der die Asymptoten A', A'' in i', i'' berührt [245], d. h. der mit K concentrisch, ähnlich und ähnlich liegend ist und daher c zum Mittelpuncte hat. (*Salmon.* l. c. [253]). Ausserdem aber ist α auch der gegenüberliegende Punct zu i', i'', a, b; denn sucht man diesen nach [240] auf, so hat man die Durchschnitte der Curve mit $i'i''$ und mit ab zu bestimmen, diese aber fallen beide in den Punct i, mithin ist der gesuchte gegenüberliegende Punct der Tangentialpunct von i, d. h. α. Demnach liegen die Puncte n, p auch auf einem Kegelschnitte K', der durch i', i'', a, b geht, d. h. der durch a, b geht und zu K ähnlich und ähnlich liegend ist. Also ist np die Durchschnittssehne zweier ähnlicher und ähnlich liegender Kegelschnitte. Diese aber ist der Richtung nach conjugirt zu den die Mittelpuncte c und c' verbindenden Durchmessern der beiden Kegelschnitte.*)

---

*) Die Ausführung dieser Construction ist freilich noch immer sehr mühsam, sie gestaltet sich aber ausserordentlich einfach, wenn die beiden Asymptoten A', A'' imaginär, und ihre unendlich fernen Puncte i', i'' die imaginären Kreispuncte sind. Denn dann verwandeln sich die ähn-

§. 3.

255. Aufgabe. Wenn eine Curve 3. O. durch neun Puncte *a b c d e f g h i* gegeben ist, zu vier derselben, *a b c d*, den gegenüberliegenden Punct *m* zu construiren.

Auflösung. Man betrachte *a b c d* als Basispuncte eines Kegelschnittbüschels und construire nach [90] die Tangenten, welche die fünf resp. durch *e*, *f*, *g*, *h*, *i* gehenden Kegelschnitte des Büschels in einem der Basispuncte z. B. in *a* berühren. Der so entstehende Tangentenbüschel sei mit $a\,(e'\,f'\,g'\,h'\,i')$ bezeichnet. Construirt man dann nach [130] den Punct *m* so, dass die Strahlen des Büschels $m\,(e\,f\,g\,h\,i)$ den eben erwähnten Tangenten der Reihe nach projectivisch entsprechen, so ist *m* der verlangte gegenüberliegende Punct zu *abcd*. — Denn alsdann ist nach [113] der Strahlbüschel [*m*] projectivisch mit dem Kegelschnittbüschel [*abcd*], und beide zusammen erzeugen daher die gegebene Curve 3. O. (*Chasles*. Construction de la courbe du 3. O. Comptes rendus. Tome 36. pag. 951. — *Cremona* art. 66.)

256. Aufgabe. Wenn eine Curve 3. O. durch neun Puncte gegeben ist, und man nimmt einen davon als Mittelpunct eines Strahlbüschels und drei andere unter ihnen als Basispuncte eines Kegelschnittbüschels, so soll man den vierten Basispunct des letzteren finden, so dass dieser mit dem Strahlbüschel zusammen die gegebene Curve erzeugt.

Auflösung. Seien *pqr* 12345 *m* die gegebenen neun Puncte, und zwar bezeichne man mit *m* denjenigen, den man zum Mittelpunct des Strahlbüschels, und mit *pqr* diejenigen, die man zu Basispuncten des Kegelschnittbüschels wählt.

---

lichen und ähnlich liegenden Ellipsen in Kreise, und die Gerade *anp* wird senkrecht auf *cc'*. (Vgl. Schlömilch's Zeitschr. f. Math. Bd. 14. pag. 368.) In diesem Falle hat diese Construction den Vorzug vor der in [253] mitgetheilten, dass die Curvenpuncte unabhängig von einander gefunden werden. Man erhält allerdings auf diese Art nur solche Curven 3. O., welche durch die imaginären Kreispuncte gehen, allein diese können sehr gut die Stelle allgemeiner Curven 3. O. vertreten. In der That sind die meisten Abbildungen, welche *Plücker* in dem „System der anal. Geom." gegeben hat, solche Curven 3. O. (vgl. System d. anal. Geom. pag. 170. Note.)

Man ziehe nun die Strahlen $m(1, 2, 3, 4, 5)$ und construire nach [209] den Punct x so, dass

$$[pqrx]\,(1, 2, 3, 4, 5) \wedge m\,(1, 2, 3, 4, 5)$$

wird; dann ist x der gesuchte vierte Basispunct. Denn alsdann sind der Kegelschnittbüschel und der Strahlbüschel projectivisch und erzeugen daher die Curve 3. O., welche durch die neun gegebenen Puncte geht.

257. Aufgabe. Eine Curve 3. O. zu construiren, wenn 9 Puncte derselben gegeben sind.

Auflösung 1. Seien $a\,b\,c\,d\,e\,f\,g\,h\,i$ die gegebenen Puncte. Man construirt zuerst nach [255] den zu irgend vier derselben, $a\,b\,c\,d$, gegenüberliegenden Punct m. Dann ist zugleich der dem Kegelschnittbüschel $[a\,b\,c\,d]$ projectivische Strahlbüschel $[m]$ bestimmt. Man erhält daher beliebig viele Curvenpuncte, wenn man die Durchschnitte beliebiger Strahlen mit den ihnen entsprechenden Kegelschnitten aufsucht. Ist z. B. mx irgend ein Strahl des Büschels $[m]$, und hat man etwa den Tangentenbüschel in a zur Construction von m benutzt, so construirt man nach [91] den zu mx in dem Büschel $[a]$ entsprechenden Strahl ax' und bestimmt nach [92] die Durchschnitte der Geraden mx mit dem Kegelschnitte, welcher durch $a\,b\,c\,d$ geht und ax' in a berührt. (*Chasles*. l. c. [255] pag. 951. *Cremona* art. 66.)

Auflösung 2. Die gegebenen Puncte seien $pqr12345m$. Man ziehe von einem derselben, m, Strahlen nach fünf anderen, 1, 2, 3, 4, 5, wähle die drei übrigen $p\,q\,r$ als Basispuncte eines mit dem Strahlbüschel $m\,(1, 2, 3, 4, 5)$ projectivischen Kegelschnittbüschels und construire nach [209] den vierten Basispunct x des letzteren so, dass die Kegelschnitte $[pqrx]\,(1, 2, 3, 4, 5)$ den Strahlen $m\,(1, 2, 3, 4, 5)$ der Reihe nach projectivisch entsprechen; dann erhält man beliebig viele Curvenpuncte, wenn man die Durchschnitte jedes Strahls mit dem ihm entsprechenden Kegelschnitte aufsucht. Man wird daher an den Kegelschnitten $[pqrx]\,(1, 2, 3, 4, 5)$ die Tangenten in einem der Basispuncte, z. B. in p, construiren (drei genügen schon um die Projectivität festzusetzen). Ist nun mz irgend ein Strahl des Büschels $[m]$, so construirt

man den diesem entsprechenden pz' in dem Tangentenbüschel $[p]$ und sucht nach [92] die Durchschnitte von mz mit demjenigen Kegelschnitte auf, welcher durch $pqrx$ geht und pz' in p berührt.

258. Aufgabe. Wenn eine Curve 3. O. durch neun Puncte gegeben ist, in einem derselben, a, die Tangente an die Curve zu construiren.

Auflösung 1. Man wähle unter den gegebenen Puncten ausser a noch drei Puncte b, c, d aus und construire zu diesen nach [255] den gegenüberliegenden Punct m. Dadurch erhält man zugleich den Tangentenbüschel $[a]$ und den ihm projectivischen Strahlenbüschel $[m]$. Bestimmt man nun in $[a]$ nach [91] denjenigen Strahl at, welcher dem Strahle ma in $[m]$ entspricht, so ist at die verlangte Tangente. — Denn at ist alsdann die Tangente desjenigen Kegelschnitts, welcher die Curve in a berührt [238]. (*Chasles.* l. c. [255] pag. 951.)

Auflösung 2. Man wähle unter den gegebenen neun Puncten drei von a verschiedene p, q, r aus, und construire nach [256] den Punct x so, dass der Kegelschnittbüschel $[pqrx]$ mit dem Strahlbüschel $[a]$ die gegebene Curve erzeugt. Bestimmt man nun in dem Letzteren den Strahl at so, dass er dem Kegelschnitt $pqrxa$ projectivisch entspricht, was mit Hülfe der Tangenten geschieht, die die Kegelschnitte des Büschels in einem Basispunct berühren, so ist at nach [237] die verlangte Tangente.

259. Aufgabe. Wenn eine Curve 3. O. durch neun Puncte gegeben ist, so sollen die Durchschnitte derselben mit einer gegebenen Geraden G bestimmt werden.

Auflösung. Man bestimmt mit Hülfe der gegebenen neun Puncte entweder nach [255] oder nach [256] einen Kegelschnittbüschel $[a\ b\ c\ d]$ und den ihm projectivischen Strahlbüschel $[m]$, welche durch die Durchschnitte ihrer entsprechenden Elemente die gegebene Curve erzeugen. Alsdann bilden auf der Geraden G die Durchschnittspaare μ, μ' der Kegelschnitte des Büschels $[a\ b\ c\ d]$ eine Involution [115], und die Durchschnitte ν der Strahlen des Büschels $[m]$ eine dieser Involution projectivische Punctreihe. Es kommt nun darauf an, diejenigen Puncte der Geraden G zu finden, in denen einer

der Puncte μ mit dem ihm entsprechenden Punct ν zusammenfällt, denn durch einen solchen Punct geht gleichzeitig ein Kegelschnitt des Büschels $[abcd]$ und der ihm entsprechende Strahl des Büschels $[m]$, und daher gehört ein solcher Punct auch der Curve 3. O. an. Zieht man von m Strahlen nach den Puncten μ, μ', so erhält man in m eine Strahleninvolution, deren Paare $m(\mu, \mu')$ den Strahlen $m\nu$ projectivisch entsprechen, und man hat nun die Geraden zu finden, in denen einer der Strahlen $m\mu$ mit dem ihm entsprechenden Strahle $m\nu$ zusammenfällt. Zu diesem Ende lege man durch m einen beliebigen Kegelschnitt S (am einfachsten einen Kreis) und schneide mit demselben die Strahlenpaare $m(\mu, \mu')$ in den Punctepaaren α, α', dann schneiden sich die Verbindungslinien $\alpha\alpha'$ je zweier Puncte desselben Paares nach [126] in einem Puncte p und bilden einen Strahlbüschel, dessen Strahlen $p\alpha\alpha'$ den Paaren $m(\mu, \mu')$ der Involution nach [127] projectivisch entsprechen. Da nun aber die letztere mit dem Strahlbüschel $[m]$ projectivisch war, so sind auch die beiden Strahlbüschel $[p]$ und $[m]$ projectivisch und $p\alpha\alpha'$, $m\nu$ entsprechende Strahlen, Diese beiden Strahlbüschel erzeugen nach [85] durch die Durchschnitte ihrer entsprechenden Strahlen einen Kegelschnitt K, welcher durch m und p geht, und da m schon dem Kegelschnitt S angehört, diesen letzteren noch in drei Puncten $\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3$ trifft. Betrachtet man einen dieser Puncte z. B. α_1, so entsprechen einander, da α_1 auf K liegt, die Strahlen $p\alpha_1$ und $m\alpha_1$ (als eine specielle Lage von $m\nu$); aber da α_1 auch auf S liegt, so entspricht der Strahl $p\,\alpha_1\,\alpha_1'$ (wo α_1' den zweiten Durchschnitt von $p\,\alpha_1$ mit S bedeuten möge) auch dem Involutionspaare $m(\alpha_1, \alpha_1')$ [127], d. h. $m\alpha_1$ tritt auch als eine specielle Lage von $m\mu$ auf, mithin fällt auf $m\alpha_1$ sowohl ein Strahl $m\mu$, als auch der ihm entsprechende $m\nu$. Da nun das nämliche auch von α_2 und α_3 gilt, so hat man nur die Strahlen $m(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ zu ziehen, und mit diesen die Gerade G in $\mu_1\ \mu_2\ \mu_3$ zu schneiden, so sind dies die gesuchten Durchschnitte von G mit der Curve 3. O. (*Chasles.* Note sur les courbes de 3me ordre etc. Comptes rendus. Tome 41. pag. 1194.)

§. 4.

260. Sind $a\ b\ c\ d\ e\ f\ g\ h\ i$ die neun Durchschnittspuncte zweier Curven 3. O., so geht der Kegelschnitt, welcher durch fünf derselben, z. B. $e\ f\ g\ h\ i$ bestimmt ist, durch die Puncte m und m', welche den vier übrigen $a\ b\ c\ d$ resp. in den beiden Curven 3. O. gegenüberliegen. (*Plücker.* Alg. Curven. pag. 56.)

Beweis. Die eine Curve 3. O. ist der geometrische Ort der Durchschnitte des Kegelschnittbüschels $[a\ b\ c\ d]$ mit dem Strahlbüschel $[m]$, die zweite Curve 3. O. der geometrische Ort der Durchschnitte desselben Kegelschnittbüschels mit dem Strahlbüschel $[m']$. Da nun die beiden Strahlbüschel demselben Kegelschnittbüschel projectivisch sind, so sind sie unter einander projectivisch, und daher [85] erzeugen ihre Durchschnitte einen Kegelschnitt K, der durch m, m' hindurch geht. Derselbe Kegelschnitt geht aber auch durch die fünf Puncte $e\ f\ g\ h\ i$. Denn betrachtet man z. B. den durch e gehenden Kegelschnitt des Büschels $[a\ b\ c\ d]$, so entspricht diesem sowohl der Strahl $m\ e$, als auch der Strahl $m'e$, weil e auf jeder der beiden Curven 3. O. liegt. Daher sind $m\ e$ und $m'e$ auch zwei entsprechende Strahlen der Büschel $[m]$ und $[m']$. Mithin [85] liegt ihr Durchschnitt e auf dem Kegelschnitte K. (*Cremona.* Cve. piane art. 67.)

261. Aufgabe. Von zwei Curven 3. O. seien vier gemeinschaftliche Puncte $a\ b\ c\ d$ und ausserdem von jeder noch fünf Puncte gegeben; man soll den Kegelschnitt construiren, welcher durch die übrigen fünf Durchschnitte der beiden Curven 3. O. geht.

Auflösung. Man construire nach [255] die Puncte m, m', welche $a\ b\ c\ d$ in den beiden Curven 3. O. resp. gegenüberliegen. Diese Construction liefert zugleich die beiden nach [260] einander projectivischen Strahlbüschel $[m]$ und $[m']$, deren Durchschnitte den gesuchten Kegelschnitt bestimmen.

262. Die Auflösung der vorigen Aufgabe gestaltet sich einfach in dem Falle, wenn die zwei Mal fünf Puncte, welche nebst $a\ b\ c\ d$ die beiden Curven 3. O. bestimmen, und die mit $\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta\ \varepsilon$ und $\alpha'\ \beta'\ \gamma'\ \delta'\ \varepsilon'$ bezeichnet werden mögen, so

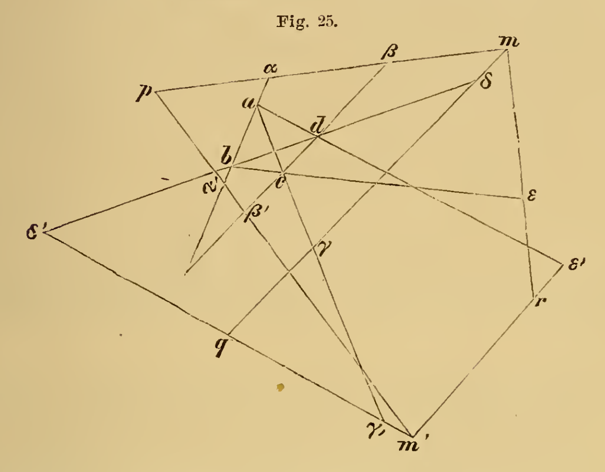
liegen, dass sich jeder auf einer der sechs durch die Puncte $a\ b\ c\ d$ gehenden Geraden befindet. — Wenn z. B. (Fig. 25) liegt

$$\alpha,\ \alpha' \text{ auf } a\ b \qquad \beta,\ \beta' \text{ auf } c\ d$$
$$\gamma,\ \gamma' \text{ auf } a\ c \qquad \delta,\ \delta' \text{ auf } b\ d$$
$$\varepsilon' \text{ auf } a\ d \qquad \varepsilon \text{ auf } b\ c$$

so erhält man die Puncte m, m' als die Durchschnitte

$$(\alpha\,\beta,\ \gamma\,\delta) = m \qquad (\alpha'\,\beta',\ \gamma'\,\delta') = m',$$

Fig. 25.



denn jetzt sind $\alpha\,\beta$ und $\gamma\,\delta$ die Durchschnitte der einen Curve und $\alpha'\,\beta'$ und $\gamma'\,\delta'$ die der anderen Curve mit den aus den Geradenpaaren $a\,b$, $c\,d$ und $a\,c$, $b\,d$ bestehenden Kegelschnitten. Da nun diejenigen von m und m' ausgehenden Strahlen, welche das nämliche durch $a\ b\ c\ d$ gehende Geradenpaar in Curvenpuncten durchschneiden, diesem Geradenpaar als einem Kegelschnitte und daher unter sich projectivisch sind, so findet man zur Bestimmung des gesuchten Kegelschnitts ausser m und m' noch die Puncte

$$(\alpha\,\beta,\ \alpha'\,\beta') = p \qquad (\gamma\,\delta,\ \gamma'\,\delta') = q, \qquad (m\,\varepsilon,\ m'\,\varepsilon') = r.$$

263. Sind $a\ b\ c\ d\ \alpha\ \beta\ \gamma\ \delta$ acht Durchschnitte zweier Curven 3. O. u und v, und m und μ die Puncte, welche in u den Puncten $a\ b\ c\ d$ und $\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta$ resp. gegenüberliegen, so ist der neunte Durchschnittspunct x der beiden Curven u, v, durch welchen also [219] alle Curven 3. O. hindurchgehen,

die durch die gegebenen acht Puncte gelegt werden können, derjenige Punct, in welchem die Gerade $m\,\mu$ die Curve u trifft.

Beweis. Man kann hier die Curve u auf doppelte Weise erzeugt denken, einmal durch die Büschel $[a\,b\,c\,d]$ und $[m]$, und dann durch die Büschel $[\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta]$ und $[\mu]$. Ist x nun der neunte Durchschnittspunct der beiden Curven u und v, so geht nach [260] der Kegelschnitt $\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta\,x$ durch m, weil m den Puncten $a\,b\,c\,d$ in u gegenüberliegt, und $\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta\,x$ die fünf übrigen Durchschnitte der beiden Curven u und v sind. Dieser Kegelschnitt ist daher zugleich der durch m gehende des Büschels $[\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta]$, mithin liegen nach [244. Zus.] seine beiden Durchschnitte m, x mit der Curve u in gerader Linie mit μ. (*Cremona.* Cve. piane art. 67. b. — *Hart.* Construction by the ruler alone to determine the ninth point of intersection of two curves of the third degree. Cambr. and Dubl. math. Journ. vol. 6. 1851. pag. 181.)

264. Aufgabe. Wenn acht Puncte $a\,b\,c\,d\,\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta$ gegeben sind, den Punct x zu construiren, in welchem sich alle durch die gegebenen Puncte gehenden Curven 3. O. schneiden.

Auflösung. Man nehme, um eine der Curven 3. O. zu bestimmen, noch einen neunten Punct k beliebig an, etwa den Durchschnitt der Geraden $a\,b$ und $\alpha\,\beta$. (Sollten die Punctepaare $a\,b$ und $\alpha\,\beta$ jedes zufällig auf einem durch $c\,d\,\gamma\,\delta$ gehenden Kegelschnitte liegen, so würde nach [222] k schon der gesuchte Punct x sein). Mit Hülfe dieses Punctes bestimmt man nach [255] die Puncte m und μ, welche resp. $a\,b\,c\,d$ und $\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta$ gegenüberliegen. Alsdann hat man den Kegelschnitt des Büschels $[a\,b\,c\,d]$ aufzusuchen, welcher durch μ geht, (oder auch den des Büschels $[\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta]$, welcher durch m geht) und den zweiten Durchschnitt desselben mit der Geraden $m\,\mu$ zu bestimmen. Dieser ist nach [263] der gesuchte Punct x.

265. Haben zwei Curven 3. O. in zwei Puncten a und α eine vierpunctige Berührung, so liegt ihr neunter Durchschnittspunct x auf der Geraden, welche die zweiten Tangentialpuncte von a und α verbindet. (Dabei ist es gleichgültig, auf welcher der beiden Curven diese zweiten Tangentialpuncte

genommen werden, der Punct x ist daher der Durchschnittspunct der beiden so bestimmten Geraden). — Aus [263]; denn fallen $a\ b\ c\ d$ in a, und $\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta$ in α zusammen, so fallen nach [242] die gegenüberliegenden Puncte m und μ in die zweiten Tangentialpuncte von a und α. (*Cremona.* Cve. piane. art. 67. d.)

266. Alle Curven 3. O., welche mit einer gegebenen Curve 3. O. in einem Puncte a eine achtpunctige Berührung haben, schneiden die letztere in dem dritten Tangentialpuncte von a. — Denn fallen in [265] auch noch a und α zusammen, so fällt auch μ auf m; daher wird die Gerade $m\ \mu\ x$ Tangente in m, und x der Tangentialpunct von m, d. h. [242] der dritte Tangentialpunct von a. (*Salmon* l. c. [242] pag. 540. *Cremona.* Cve. piane. art. 67. d.)

Dritter Abschnitt.

Die gerade und die conische Polare eines Punctes.

§. 1.

267. Jeder Punct der Ebene hat bezüglich einer Curve 3. O. eine erste Polare, welche ein Kegelschnitt ist, und daher conische Polare heisst; und eine zweite Polare, welche eine Gerade ist, und daher gerade Polare heisst [171]. Bezüglich der Curve $u = 0$ ist bei veränderlichen y_i die Gleichung der conischen Polare eines Punctes x

$$\varDelta_x(u_y) = 0 \quad \text{oder} \quad \varDelta_y{}^2(u_x) = 0,$$

und die Gleichung der geraden Polare des Punctes x

$$\varDelta_x{}^2(u_y) = 0 \quad \text{oder} \quad \varDelta_y(u_x) = 0.$$

Daher ist sowohl die conische als auch die gerade Polare jedes Punctes eindeutig bestimmt, nur wenn dieser ein Doppelpunct der Curve 3. O. ist, ist [176] seine gerade Polare ganz unbestimmt, während [181] seine conische Polare aus dem Tangentenpaare in dem Doppelpuncte besteht*).

---

*) Für einen dreifachen Punct einer Curve 3. O. ist auch die conische Polare unbestimmt.

268. Die conische Polare jedes auf der Hesse'schen Curve liegenden Punctes, und nur eines solchen, besteht aus einem Geradenpaare [189], welches das polare Geradenpaar des Punctes genannt werden soll.

269. Die gerade Polare eines auf der Fundamentalcurve liegenden Punctes x ist die Tangente in diesem Puncte [176]; die conische Polare von x geht durch diesen Punct und berührt in ihm die Fundamentalcurve [177].

270. Aus jedem Puncte der Ebene gehen sechs Tangenten an eine Curve 3. O. ohne Doppel- oder Rückkehrpunct, oder diese ist von der sechsten Classe [186]. Hat die Curve einen Doppelpunct, so ist sie nur von der vierten, und hat sie einen Rückkehrpunct, von der dritte Classe [188]. In allen Fällen sind die Berührungspuncte Durchschnitte der Curve mit der conischen Polare des Punctes, von welchem aus die Tangenten gelegt sind [182]. Die conische Polare jedes Punctes geht ausserdem durch die Doppel- oder Rückkehrpuncte, falls solche existiren [179], und berührt die Tangente in einem Rückkehrpuncte [180].

271. Die conische Polare eines Wendepunctes besteht aus zwei Geraden, von denen die eine die Wendetangente ist. — Denn der Wendepunct liegt auf der Hesse'schen Curve [155], und ausserdem berührt die conische Polare die Curve in dem Wendepuncte [269].

272. Aus einem Puncte der Curve gehen ausser der Tangente in diesem Puncte selbst noch vier Tangenten an die Curve (wenn ein Doppelpunct existirt, zwei, bei einem Rückkehrpuncte eine [187, 188]). Ist der Punct aber ein Wendepunct, so gehen nur drei Tangenten an die Curve, weil die conische Polare dann aus der Wendetangente und einer Geraden besteht, die letztere aber die Curve nur in drei Puncten durchschneidet [270, 271]. Als vierte Tangente ist dann die Wendetangente zu betrachten.

273. Geht die gerade Polare eines Punctes x durch einen Punct y, so geht die conische Polare von y durch x; und umgekehrt [173].

274. Die gerade Polare eines Punctes x in Bezug auf eine Curve 3. O. ist zugleich die Polare von x in Bezug auf den

Kegelschnitt, welcher die conische Polare von x bezüglich der Curve 3. O. bildet [174].

275. Sind A und B die conischen Polaren zweier Puncte a und b bezüglich einer Curve 3. O., so ist die Polare des Punctes a in Bezug auf den Kegelschnitt B identisch mit der Polare des Punctes b in Bezug auf den Kegelschnitt A. — Aus [175] für $r = 1$ und $s = 1$.

Da die Polare eines Punctes in Bezug auf einen Kegelschnitt die Gerade ist, welche die Berührungspuncte der aus jenem Puncte an den Kegelschnitt gelegten Tangenten verbindet [96], so lässt sich dieser Satz auch so aussprechen: Zieht man aus a die beiden Tangenten an B, und aus b die beiden Tangenten an A, so liegen die vier Berührungspuncte in einer Geraden. Diese Gerade heisst die gemischte gerade Polare der Puncte a und b. (*Cremona.* Cve. piane. art. 130. b.)

276. Sei B die conische Polare eines Punctes b, C die conische Polare eines Punctes c, und a ein dritter Punct. Wenn nun die Polare von a bezüglich des Kegelschnittes B durch c geht, so geht die Polare von a bezüglich des Kegelschnittes C durch b. (*Cremona.* Cve. piane. art. 69. d.)

Beweis. Bei veränderlichen y_i ist die Gleichung der conischen Polare B von b nach [267]

$$B_y = \Delta_b(u_y) = 0,$$

und die der conischen Polare C von c

$$C_y = \Delta_c(u_y) = 0.$$

Dann ist die Polare von a bezüglich B in veränderlichen z_i

$$\Delta_z(B_a) = \Delta_z(\Delta_b(u_a)) = 0,$$

und die Polare von a bezüglich C

$$\Delta_z(C_a) = \Delta_z(\Delta_c(u_a)) = 0.$$

Geht nun die erstere durch c, so gilt

$$\Delta_c(\Delta_b(u_a)) = 0.$$

Da aber hieraus nach [3] auch

$$\Delta_b(\Delta_c(u_a)) = 0$$

folgt, so geht die Polare von a bezüglich C durch b.

277. Zieht man durch irgend einen Punct x auf einer

Curve 3. O. $u = 0$ Secanten, welche die Curve in z' und z'' schneiden, und bestimmt auf jeder den bezüglich z' und z'' zu x zugeordneten harmonischen Punct y, so ist der geometrische Ort des Punctes y, wenn die Secante sich um x dreht, die conische Polare von x.

Beweis. Sind x, y, z drei in gerader Linie liegende Puncte, so besteht zwischen ihren Coordinaten [19] die Relation

$$z_i = y_i + \lambda x_i,$$

wo λ eine Constante bedeutet. Liegt z auf der Curve, so erhält man, wenn man diese Ausdrücke in die Gleichung $u=0$ substituirt, nach [4]

$$0 = u_y + \lambda \Delta_x(u_y) + \frac{\lambda^2}{2!} \Delta_x^2(u_y) + \frac{\lambda^3}{3!} \Delta_x^3(u_y).$$

Liegt nun x auch auf der Curve, so verschwindet $\Delta_x^3(u_y)$, weil nach [5] $\Delta_x^3(u_y) = 1 . 2 . 3 . u_x$, und $u_x = 0$ ist. Dadurch verwandelt sich die vorige Gleichung in

$$0 = u_y + \lambda \Delta_x(u_y) + \frac{\lambda^2}{2!} \Delta_x^2(u_y),$$

und die Wurzeln λ derselben gehören den beiden Puncten z' und z'' an, in welchen die Secante $x\,y$ die Curve ausser in x noch schneidet. Sollen nun aber z', z'' harmonisch zugeordnet sein in Bezug auf x, y, so müssen nach [25] die beiden Wurzeln λ gleich und entgegengesetzt sein. Dazu ist erforderlich und hinreichend, dass

$$\Delta_x(u_y) = 0$$

ist. Für veränderliche y_i aber stellt diese Gleichung die conische Polare des Punctes x dar [267].

278. Hieraus folgt auch sogleich der umgekehrte Satz: Schneidet eine durch einen Curvenpunct x gelegte Gerade die Curve in z', z'', und die conische Polare von x in y, so sind xy, $z'z''$ zwei Paare harmonisch zugeordneter Puncte.

279. Ist x ein Wendepunct, so ist der geometrische Ort der Puncte y, welche in Beziehung auf die Puncte z', z'', in denen eine durch x gehende Gerade die Curve schneidet, zu x harmonisch zugeordnet sind, eine gerade Linie, welche die harmonische Polare des Wendepunctes heisst. (*Maclaurin*. l. c. [230] pag. 228. *Salmon*. pag. 140. *Cremona*. art. 39. c.) — Denn in

diesem Falle besteht die conische Polare von x aus der Wendetangente und einer zweiten Geraden [271].

280. Mithin: Die conische Polare eines Wendepunctes besteht aus der Wendetangente und der harmonischen Polare des Wendepunctes; und: Die harmonische Polare eines Wendepunctes schneidet die Curve in den Berührungspuncten der drei aus dem Wendepuncte an die Curve gehenden Tangenten [272].

281. Ist C die conische Polare eines Punctes c, so schneiden sich die geraden Polaren aller auf C liegenden Puncte g in dem Puncte c; und umgekehrt: Der geometrische Ort aller Puncte g, deren gerade Polaren sich in einem Puncte c schneiden, ist ein Kegelschnitt, nämlich die conische Polare von c. — Denn geht die conische Polare von c durch g, so geht die gerade Polare von g durch c; und umgekehrt [273].

282. Zu einer conischen Polare C bezüglich einer Curve 3. O. gehört nur ein einziger Pol c.

Beweis. Sind g und g' zwei beliebige auf C liegende Puncte, so gehen ihre geraden Polaren G und G' beide durch c [273]. Diese beiden Geraden sind durch g und g' vollkommen bestimmt [267]. Wäre nun C gleichzeitig die conische Polare eines andern Puncts c', so müssten die Geraden G und G' auch durch c' gehen [273], was im Allgemeinen nicht der Fall ist.

283. Nicht jeder Kegelschnitt ist eine conische Polare in Bezug auf eine gegebene Curve 3. O.; sondern damit ein durch fünf Puncte bestimmter Kegelschnitt eine conische Polare sei, ist nothwendig und hinreichend, dass die geraden Polaren dieser fünf Puncte sich in einem Puncte schneiden, welcher dann der Pol der conischen Polare ist. — Aus [281].

284. Die conischen Polaren aller Puncte, die auf derselben Geraden liegen, schneiden sich in den nämlichen vier Puncten, bilden daher einen Kegelschnittbüschel. — Aus [193].

285. Jede Gerade G ist eine gerade Polare bezüglich einer gegebenen Curve 3. O. $u = 0$ und hat als solche vier Pole, d. h. es giebt vier Puncte, welche die Gerade G gleichzeitig bezüglich u zur geraden Polare haben. Diese vier Puncte sind die Basispuncte des Kegelschnittbüschels, der

von den conischen Polaren der auf G liegenden Puncte gebildet wird. — Aus [192].

286. Hat die Curve 3. O. einen Doppelpunct, so hat jede Gerade diesen zum Pol und ausserdem noch drei Pole, da sämmtliche conische Polaren durch den Doppelpunct gehen [270], und die gerade Polare des Doppelpuncts unbestimmt ist [267].

Hat die Curve einen Rückkehrpunct, so fallen für jede Gerade G zwei Pole in den Rückkehrpunct, und die Gerade hat ausserdem noch zwei Pole. Denn sämmtliche conische Polaren berühren die Rückkehrtangente in dem Rückkehrpuncte [270], und daher haben die conischen Polaren der auf G liegenden Puncte ausserdem nur zwei Puncte gemeinsam.

Besteht die Curve 3. O. aus drei Geraden, so hat jede andere Gerade G ausser den drei Durchschnitten der ersteren nur einen Pol. Denn sämmtliche conische Polaren gehen durch die von den Durchschnitten der drei Geraden gebildeten Doppelpuncte [270], und daher haben die conischen Polaren der auf G liegenden Puncte ausserdem nur noch einen Punct gemeinsam.

287. Die conischen Polaren aller Puncte der Ebene bezüglich derselben Curve 3. O. bilden ein Kegelschnittnetz. [199].

288. Alle conischen Polaren in Bezug auf dieselbe Curve 3. O., welche durch denselben Punct g hindurchgehen, bilden einen Kegelschnittbüschel [197], und die vier Basispuncte des letzteren sind die Pole einer und derselben Geraden. — Denn ist G die gerade Polare von g, so liegen die Pole aller durch g gehenden conischen Polaren auf G [273], und daher bilden [284] diese einen Büschel, dessen Basispuncte die Pole von G sind [285].

289. Durch zwei beliebig gewählte Puncte g und g' geht im Allgemeinen nur eine einzige conische Polare, nämlich diejenige, deren Pol der Durchschnitt der geraden Polaren von g und g' ist. (S. auch [198].) Sind aber g und g' zwei Pole derselben Geraden G, so gehen unendlich viele conische Polaren durch diese Puncte und bilden einen Kegelschnittbüschel, nämlich alle diejenigen, deren Pole auf G liegen.

§. 2.

290. Die gerade Polare eines Punctes a in Bezug auf eine aus drei Geraden $II\,III$, $III\,I$, $I\,II$ bestehende Curve 3. O. schneidet diese Geraden in drei Puncten l, m, n, welche in Bezug auf die Puncte $II\,III$, $III\,I$, $I\,II$, resp. harmonisch zugeordnet sind zu den Puncten α, β, γ, in welchen die Geraden $I\,a$, $II\,a$, $III\,a$ die gegenüberliegenden Seiten des Dreieckes $I\,II\,III$ treffen. (Fig. 8.)

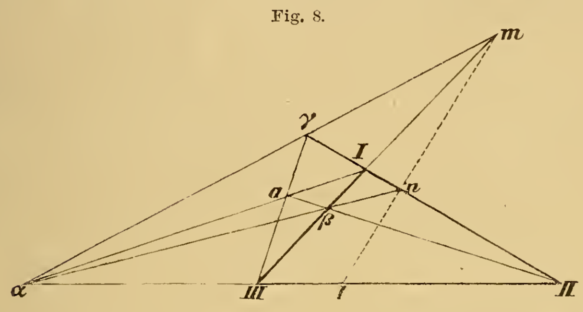
Beweis. Nimmt man $I\,II\,III$ zum Fundamentaldreieck, so ist die Gleichung der Curve

$$u = x_1 x_2 x_3 = 0.$$

Für veränderliche y_i ist dann die Gleichung der geraden Polare eines Punctes x nach [267]

$$\varDelta_y(u_x) = x_2 x_3 y_1 + x_3 x_1 y_2 + x_1 x_2 y_3 = 0$$

Fig. 8.



Nennt man also $a_1\ a_2\ a_3$ die Coordinaten von a, und bezeichnet die veränderlichen Coordinaten wieder mit x_i, so ist die Gleichung der geraden Polare von a

$$a_2 a_3 x_1 + a_3 a_1 x_2 + a_1 a_2 x_3 = 0 \text{ oder } \frac{x_1}{a_1} + \frac{x_2}{a_2} + \frac{x_3}{a_3} = 0.$$

Diese Gerade aber hat nach [80] die behauptete Eigenschaft. (*Salmon*. pag. 149.)

Anmerkung. Liegt der Punct a auf einer der drei Geraden, z. B. auf $I\,II$, d. h. ist $a_3 = 0$, so verwandelt sich die Gleichung der geraden Polare in $x_3 = 0$; diese fällt also dann mit der Geraden zusammen, auf welcher a liegt.

Zusatz. Fallen von den gegebenen Geraden zwei in eine zusammen, so geht die gerade Polare jedes Puncts durch

den Durchschnitt der beiden übrig bleibenden Geraden. — Denn fallen z. B. zwei Gerade mit $x_2 = 0$ zusammen, und ist die dritte $x_1 = 0$, so heisst die Gleichung der Curve $u = x_1 x_2^2 = 0$; daher wird die Gleichung der geraden Polare von x in veränderlichen y_i: $x_2^2 y_1 + 2 x_1 x_2 y_2 = 0$, also die eines Punctes a bei veränderlichen x_i

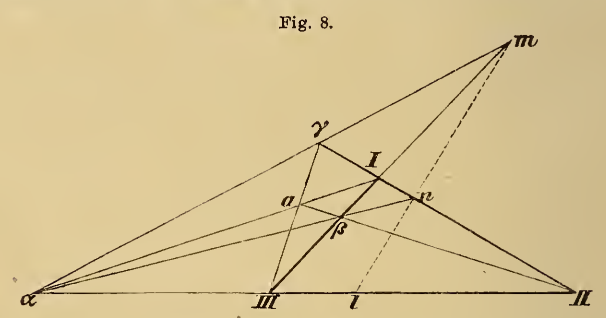
$$a_2 x_1 + 2 a_1 x_2 = 0;$$

diese geht mithin durch den Durchschnitt der Geraden $x_1 = 0$ und $x_2 = 0$.

291. Aufgabe. Die gerade Polare eines gegebenen Puncts a in Bezug auf eine aus drei Geraden *II III*, *III I*, *I II* bestehende Curve 3. O. zu construiren.

Auflösung. (Fig. 8.) Man ziehe die Geraden *Ia*, *IIa*, *IIIa* und schneide mit ihnen die den Ecken *I II III* gegenüberliegenden Seiten dieses Dreiecks in α, β, γ; man schneide

Fig. 8.



sodann mit den Geraden $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$, $\alpha\beta$ die jedesmalige dritte Seite in l, m, n, so liegen diese drei Puncte in einer Geraden, welche die verlangte Polare ist. — Aus [290] in Verbindung mit [80].

292. Aufgabe. Zu einer gegebenen Geraden A in Bezug auf eine aus drei Geraden *II III*, *III I*, *I II* bestehende Curve 3. O. den zugehörigen Pol [286] zu construiren. (Fig. 8.)

Auflösung. Sind l, m, n die Durchschnitte der Geraden A mit den Seiten *II III*, *III I*, *I II*, so bestimme man die zu l, m, n in Beziehung auf die Ecken des Dreiecks *I II III* zugeordneten harmonischen Puncte α, β, γ und ziehe *I*α, *II*β, *III*γ, so schneiden sich diese drei Geraden in dem gesuchten Pole a. (Man braucht natürlich nur einen der drei Puncte

α, β, γ zu bestimmen, denn hat man z. B. α bestimmt, so ist $\beta = (\alpha n,\ III\,I)$ und dann $a = (I\alpha,\ II\beta))$. — Aus [290] in Verbindung mit [80].

293. Zieht man durch einen Punct a zwei Transversalen, welche eine Curve 3. O. $u = 0$ resp. in den Puncten $b\,b'\,b''$ und $c\,c'\,c''$ schneiden, und zieht ferner die Geraden bc, $b'c'$, $b''c''$ (wobei diese Puncte in beliebiger Weise combinirt werden können), so ist die gerade Polare des Punctes a in Bezug auf diese drei Geraden zugleich die gerade Polare von a bezüglich der Curve u.

Beweis. Aus [172], denn die Geraden bc, $b'c'$, $b''c''$ bilden eine Curve 3. O., welche die Curve u so schneidet, dass zwei Mal drei Schnittpuncte $b\,b'\,b''$ und $c\,c'\,c''$ in zwei Geraden liegen, die sich in dem Puncte a treffen.

294. Schneidet eine durch einen Punct a gelegte Gerade eine Curve 3. O. $u = 0$ in b, b', b'', so ist die gerade Polare von a in Bezug auf die Curve u dieselbe wie in Bezug auf die drei Tangenten in den drei Puncten b, b', b''. — Aus [293], wenn die Geraden $b\,b'\,b''$ und $c\,c'\,c''$ zusammenfallen. (*Salmon.* pag. 150.)

295. Aufgabe. Die gerade Polare eines Punctes a in Bezug auf eine beliebige Curve 3. O. zu construiren, wenn a nicht auf der Curve liegt.

Auflösung. Man ziehe durch a zwei beliebige Gerade, welche die Curve in $b\,b'\,b''$ und $c\,c'\,c''$ schneiden mögen, ziehe sodann bc, $b'c'$, $b''c''$ (wobei diese Puncte in beliebiger Art combinirt werden können) und construire nach [291] die gerade Polare von a in Beziehung auf die drei Geraden bc, $b'c'$, $b''c''$, so ist diese zugleich die gesuchte Polare in Beziehung auf die Curve. — Aus [293]. (*Salmon.* pag. 149.) Für den Fall, dass die Curve 3. O. aus einer Geraden und einem Kegelschnitte besteht, s. [304].

296. Die conische Polare eines Punctes a in Bezug auf eine aus drei Geraden $II\,III$, $III\,I$, $I\,II$ bestehende Curve 3. O. ist ein dem Dreieck $I\,II\,III$ umschriebener Kegelschnitt, dessen Tangenten in den Ecken des Dreiecks die gegenüberliegenden Seiten in den Puncten l, m, n treffen, in welchen

diese Seiten von der geraden Polare von a in Bezug auf das Dreieck *I II III* geschnitten werden.

Beweis. Dass die conische Polare durch die Ecken des Dreiecks *I II III* geht, folgt schon daraus, dass diese Puncte Doppelpuncte der Curve 3. O. sind [270]. Nimmt man nun dieses Dreieck als Fundamentaldreieck an, sodass $u = x_1 x_2 x_3 = 0$ die Gleichung der Curve ist, so ist die Gleichung der conischen Polare eines Punctes x bei veränderlichen y_i nach [267]

$$\varDelta_y^2 (u_x) = x_1 y_2 y_3 + x_2 y_3 y_1 + x_3 y_1 y_2 = 0,$$

also die des Punctes a bei veränderlichen x_i

$$a_1 x_2 x_3 + a_2 x_3 x_1 + a_3 x_1 x_2 = 0.$$

Diese Gleichung stellt aber nach [102] einen Kegelschnitt dar, welcher durch die Ecken des Dreiecks *I II III* geht, und dessen Tangenten in den Ecken die gegenüberliegenden Seiten in drei Puncten schneiden, die auf der Geraden $\frac{x_1}{a_1} + \frac{x_2}{a_2} + \frac{x_3}{a_3} = 0$ liegen, welche nach [290] die gerade Polare von a ist. (*Salmon.* pag. 149.)

Bemerkung. Liegt der Punct a auf einer der drei Geraden z. B. auf *II III*, so besteht seine conische Polare aus dieser Geraden *II III* und einer zweiten *Iα*, welche harmonisch zugeordnet ist zu *Ia* in Beziehung auf *I II* und *I III*. — Denn dann ist $a_1 = 0$, und die Gleichung der conischen Polare geht über in $x_1 (a_2 x_3 + a_3 x_2) = 0$. Die Gerade *Iα* hat also die Gleichung $a_2 x_3 + a_3 x_2 = 0$, während die Gerade *Ia* nach [77] die Gleichung $a_2 x_3 - a_3 x_2 = 0$ hat. [59].

297. Aufgabe. Die conische Polare eines Punctes a in Bezug auf ein Dreieck *I II III* zu construiren.

Auflösung. Man construire nach [291] die gerade Polare des Punctes a in Bezug auf das Dreieck *I II III* und bezeichne mit l, m, n die Puncte, in welchen diese die Seiten *II III*, *III I*, *I II* schneidet. Alsdann construirt man den Kegelschnitt, welcher durch die Ecken *I II III* geht und in diesen die Geraden *Il*, *IIm*, *IIIn* berührt. Dieser ist nach [296] die verlangte conische Polare.

298. Jeder einem Dreieck *I II III* umschriebene Kegel-

schnitt kann als eine conische Polare bezüglich dieses Dreiecks betrachtet werden.

Beweis. Nimmt man zur Bestimmung eines solchen Kegelschnittes zwei Puncte g, g' beliebig an, und nennt G, G' deren gerade Polaren in Bezug auf das Dreieck, so geht die conische Polare des Durchschnitts c dieser beiden Geraden nach [273] durch g und g', und da sie ausserdem nach [296] durch $I\ II\ III$ geht, so fällt sie mit dem gegebenen Kegelschnitt zusammen.

299. Aufgabe. Zu einem dem Dreieck $I\ II\ III$ umschriebenen Kegelschnitte, als conische Polare in Bezug auf dieses Dreieck betrachtet, den zugehörigen Pol c zu construiren.

Auflösung 1. Man construirt die Tangenten, welche den Kegelschnitt in den Puncten I, II, III berühren, und schneidet mit ihnen die Seiten $II\ III$, $III\ I$, $I\ II$ in l, m, n. Sodann construirt man nach [292] den Pol der Geraden $l\ m\ n$, so ist dies der verlangte Pol c [296].

Auflösung 2. Sind g, g' zwei Puncte, welche nebst $I\ II\ III$ den Kegelschnitt bestimmen, so construire man nach [291] die geraden Polaren von g, g' in Bezug auf das Dreieck $I\ II\ III$. Der Durchschnitt derselben ist nach [298] der verlangte Pol.

300. Auf das Vorige stützt sich eine andere Auflösung der Aufgabe [124] nämlich: Wenn zwei Kegelschnitte durch je fünf Puncte $a\ b\ c\ e\ f$ und $a\ b\ c\ e'\ f'$, von denen drei, $a\ b\ c$, beiden Kegelschnitten angehören, gegeben sind, den vierten Durchschnittspunct d der beiden Kegelschnitte zu construiren.

Auflösung. Man betrachte die gegebenen Kegelschnitte nach [298] als zwei conische Polaren in Bezug auf das Dreieck $a\ b\ c$, und construire nach [299] die ihnen zugehörigen Pole p und p'. Construirt man dann nach [292] den zu der Geraden pp' gehörigen Pol, so ist dies der verlangte Punct d.

Beweis. Die conischen Polaren aller auf der Geraden pp' liegenden Puncte schneiden sich [284] in den nämlichen vier Puncten, nämlich [285] in den vier Polen der Geraden pp'. Drei von diesen sind die Puncte $a\ b\ c$. Da nun p und p' die Pole der gegebenen Kegelschnitte sind, so ist der

vierte Pol der Geraden pp' zugleich der vierte Durchschnitt d der beiden Kegelschnitte.

301. Zieht man durch einen Punct m drei Gerade, welche eine gegebene Curve 3. O. u in den Puncten $a\,b\,c$, $a'\,b'\,c'$, $a''\,b''\,c''$ schneiden, so gehen durch diese neun Puncte unendlich viele Curven 3. O. hindurch [218], und in Bezug auf alle diese ist die conische Polare des Punctes m dieselbe wie in Bezug auf die Curve u.

Beweis. Die Schnitte der conischen Polare von m bezüglich u mit einer der drei Geraden, z. B. $a\,b\,c$, sind nach [168] die harmonischen Centren 2ten Grades für den Pol m und in Bezug auf a, b, c. Da nun die Schnittpuncte der drei Transversalen $a\,b\,c$, $a'\,b'\,c'$, $a''\,b''\,c''$ mit allen Curven des Büschels 3. O. die nämlichen sind, so sind auch die Schnittpuncte der conischen Polaren von m bezüglich aller dieser Curven mit jenen Transversalen die nämlichen, und da hienach die sämmtlichen conischen Polaren durch die nämlichen sechs Puncte hindurchgehen, so fallen sie alle mit einem und demselben Kegelschnitte zusammen. (*Salmon.* H. pl. Cvs. pag. 150.)

302. Besteht eine Curve 3. O. aus einer Geraden A und einem Kegelschnitte K, so schneidet die conische Polare C eines Puncts c den Kegelschnitt K in den vier Puncten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, in welchen derselbe getroffen wird: 1) von der Geraden A (in α, β), und 2) von der Polare P von c in Bezug auf den Kegelschnitt K (in γ, δ).

Beweis 1. Die conische Polare C geht durch α, β, weil dies Doppelpuncte der Curve 3. O. sind [270]. Ausserdem geht sie [270] durch die Berührungspuncte der von c an die Curve gehenden Tangenten. Diese sind aber in diesem Falle nur die beiden von c an den Kegelschnitt K gehenden Tangenten, und deren Berührungspuncte sind [96] die Puncte γ, δ.

Beweis 2. Die Gleichung der Curve ist in diesem Falle

$$u = A \,.\, K = 0,$$

und daher die Gleichung der conischen Polare von c nach [267] bei veränderlichen x

$$C = \Delta_c(u_x) = \Delta_c(A_x\, K_x) = 0,$$

was sich nach [2] schreiben lässt

$$C = A\,\Delta_c(K_x) + K\,\Delta_c(A_x) = 0.$$

Darin ist $\Delta_c(K_x)$ die Polare P des Puncts c in Bezug auf den Kegelschnitt K [95], und $\Delta_c(A_x)$ eine Constante, etwa k, weil A eine lineare Function ist. Man erhält also

$$C = A\,.\,P + k\,K = 0.$$

Dies aber ist ein Kegelschnitt, welcher durch die Puncte geht, in denen K von den Geraden A und P getroffen wird. (*Salmon.* H. pl. Cvs. pag. 150.)

303. Besteht eine Curve 3. O. u aus einer Geraden A und einem Kegelschnitte K, so geht die gerade Polare G eines Punctes c bezüglich u durch den Punct, in welchem sich die Gerade A und die Polare P von c bezüglich des Kegelschnittes K schneiden.

Beweis. Die gerade Polare G von c bezüglich u ist [274] zugleich die Polare von c bezüglich der conischen Polare C, also ist ihre Gleichung

$$G = \Delta_c(C_x) = 0.$$

Nach [302] aber ist $C = A\,P + k\,K$, man erhält daher

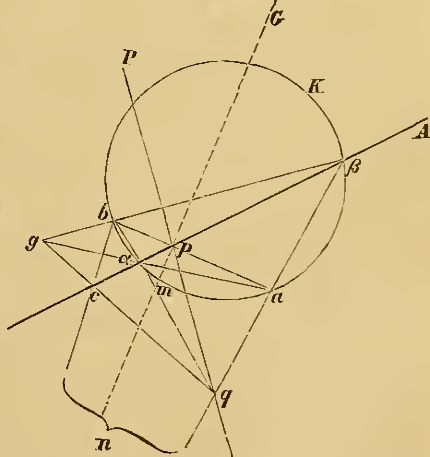
$$G = \Delta_c(AP + kK)_x = A\,\Delta_c(P_x) + P\,\Delta_c(A_x) + k\,\Delta_c(K_x) = 0.$$

Darin ist $\Delta_c(K_x) = P$, $\Delta_c(A_x) = k$ und $\Delta_c(P_x)$ ebenfalls eine Constante, etwa l; demnach wird

$$G = l\,A + 2k\,P = 0,$$

und dies ist eine Gerade, welche durch den Durchschnitt von A und P geht.

Fig. 26.



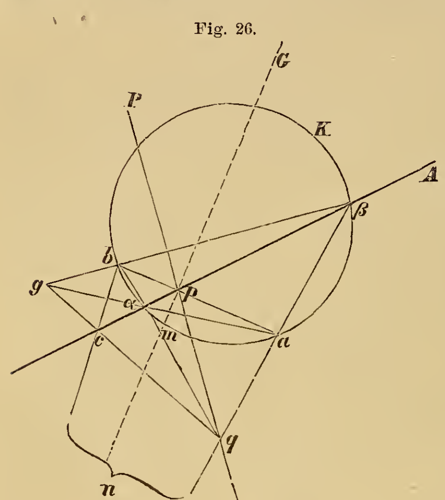
304. Aufgabe. Die gerade Polare G eines Punctes g in Bezug auf eine Curve 3. O., welche aus einer Geraden A und einem Kegelschnitte K besteht, zu construiren.

Auflösung. Wenn die Gerade A den Kegelschnitt K in α und β schneidet, so ziehe man (Fig. 26) $g\alpha$ und $g\beta$, schneide damit

den Kegelschnitt K in a und b, und suche die Schnittpuncte $(\alpha\beta, ab) = p$ und $(\alpha b, a\beta) = q$. Dann ist pq die Polare P von g in Bezug auf den Kegelschnitt K. Bestimmt man dann den zu $p\,ab$ in Beziehung auf $p\,\alpha\beta$ und pq zugeordneten harmonischen Strahl pmn, so ist dieser die verlangte gerade Polare G.

Beweis. Verfährt man nach [295], indem man $g\,b\,\beta$ und $g\,a\,\alpha$ als die beiden Transversalen betrachtet, so liegen sowohl in α, als auch in β zwei Durchschnitte derselben mit der Curve 3. O. vereinigt. Combinirt man nun diese Puncte so zu drei Geraden, dass man α, α, a resp. mit β, b, β verbindet, so erhält man $\alpha\,\beta\,q$ als das Dreieck, in Bezug auf welches nach [293] die gerade Polare von g dieselbe ist, wie in Bezug auf die Curve 3. O. Um nun die gerade Polare von g in Bezug auf $\alpha\beta q$ nach [291] zu construiren,

Fig. 26.



hat man von g nach den Ecken α, β, q drei Geraden zu ziehen, welche die gegenüberliegenden Seiten resp. in a, b, c schneiden, sodann mit den Geraden ab, bc, ca die jedesmalige dritte Seite in p, n, m zu schneiden, dann ist $p\,m\,n$ die verlangte gerade Polare G. Hiedurch bestätigt sich zunächst [303], dass G durch den Durchschnitt p von A und P geht. Da aber nun nach [290] $b\,m\,\alpha\,q$ vier harmonische Puncte sind und ebenso $a\,n\,\beta\,q$, so sind $p\,(b\,m\,\alpha\,q)$ oder, was dasselbe ist, $p\,(a\,n\,\beta\,q)$ vier harmonische Strahlen.

Wenn die Gerade A den Kegelschnitt K nicht schneidet, so erleidet die Auflösung in [295] keine wesentliche Vereinfachung.

305. Aufgabe. Wenn eine Curve 3. O. aus einer Geraden A und einem Kegelschnitte K besteht, die conische Polare C eines gegebenen Punctes g zu construiren.

Auflösung. Man construire die Polare P von g in Bezug auf K und nach [304] oder [295] die gerade Polare G von g in Bezug auf die Curve 3. O. Wird dann K von A in α, β und von P in γ, δ geschnitten, so ist die gesuchte conische Polare C nach [302] ein Kegelschnitt, welcher durch $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ geht, und für den die Gerade G die Polare von g ist [274]. Man muss nun unterscheiden, ob die vier Puncte $\alpha\, \beta\, \gamma\, \delta$ alle, oder nur zwei von ihnen, oder keiner reell ist.

I. Sind alle vier Puncte $\alpha\, \beta\, \gamma\, \delta$ reell, so verbinde man, um einen fünften Punct des gesuchten Kegelschnitts zu finden, g mit einem dieser Puncte z. B. α, schneide mit dieser Geraden die Polare G in g' und bestimme den zu α in Bezug auf g, g' zugeordneten harmonischen Punct α', so ist der durch $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \alpha'$ gehende Kegelschnitt die gesuchte conische Polare C [95].

II. Wenn von den beiden Punctepaaren $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ nur das eine z. B. α, β reell ist (sind γ, δ reell, so ist die Construction dieselbe), so kann man zunächst auf die eben angegebene Art zwei neue Puncte α', β' des gesuchten Kegelschnittes finden. (Hat man α', so kann man β' auch dadurch finden, dass man bestimmt $(\alpha\beta, G) = p$, $(\alpha' p, g\beta) = \beta'$). Um den noch fehlenden fünften zu erhalten, bemerke man, dass die Kegelschnitte K, C und das Geradenpaar A, P einem Büschel angehören, welcher die Puncte $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ (von denen allerdings nur zwei reell sind) zu Basispuncten hat, und dass sie daher von einer beliebigen Transversale in conjugirten Punctepaaren einer Involution geschnitten werden [115]. Man ziehe demnach durch α' (oder auch durch β') eine beliebige Gerade, welche K in k, k' und A, P in h, h' schneidet und construire nach [117] in der durch kk', hh' bestimmten Involution den zu α' conjugirten Punct α'', so gehört dieser dem Kegelschnitt C, der gesuchten conischen Polare an, welche nun durch die fünf Puncte $\alpha, \beta, \alpha', \beta', \alpha''$ bestimmt ist.

III. Wenn keine der beiden Geraden A und P den Kegelschnitt K schneidet, so kann man sich auf folgende Art die zur Construction des Kegelschnitts C nöthigen Puncte verschaffen. Man lege durch g eine beliebige Gerade, welche A, P in h, h', K in k, k' und G in g' schneide, und bezeichne die unbekannten Durchschnitte dieser Geraden mit dem Kegel-

schnitte C durch x, y. Construirt man dann nach [75] die Doppelpuncte e, f der durch hh', kk' bestimmten Involution, so sind e, f harmonisch zu x, y, weil die letzteren zu derselben Involution gehören (S. II). Aber x, y sind auch harmonisch zu g, g', weil G die Polare von g in Bezug auf C ist [95]; man findet also x, y, wenn man die Puncte sucht [75], die e, f und g, g' gleichzeitig harmonisch trennen. Indem man diese Construction bei drei verschiedenen durch g gehenden Geraden ausführt, erhält man sechs Puncte des gesuchten Kegelschnittes C. Es wird in den meisten Fällen vortheilhaft sein, dazu die drei Geraden zu wählen, welche den Geraden A, P, G parallel sind. Diese schneiden allemal den Kegelschnitt K, wenn P ihn nicht schneidet.

306. Aufgabe. Die conische Polare eines Punctes c in Bezug auf eine beliebige gegebene Curve 3. O. u zu construiren, wenn c nicht auf u liegt.

Auflösung. Man schneide die Curve mit einer beliebigen Geraden A in $a\, a'\, a''$, ziehe ca, ca', ca'' und schneide mit diesen Geraden die Curve in bd, $b'd'$, $b''d''$. Dann liegen die letztern sechs Puncte nach [225] in einem Kegelschnitt K. Construirt man nun nach [305] die conische Polare von c in Bezug auf die aus der Geraden A und dem Kegelschnitt K bestehende Curve 3. O., so ist das die gesuchte conische Polare. — Denn die neun Durchschnitte $a\,b\,d$, $a'\,b'\,d'$, $a''\,b''\,d''$ der beiden Curven 3. O. u und (A, K) liegen auf drei in c zusammenlaufenden Geraden, und daher [301] ist die conische Polare von c in Bezug auf (A, K) identisch mit der in Bezug auf u. (*Salmon.* H. pl. Cvs. pag. 150.)

307. Aufgabe. Die conische Polare eines Punctes c in Bezug auf eine beliebige Curve 3. O. u zu construiren, wenn c auf u liegt.

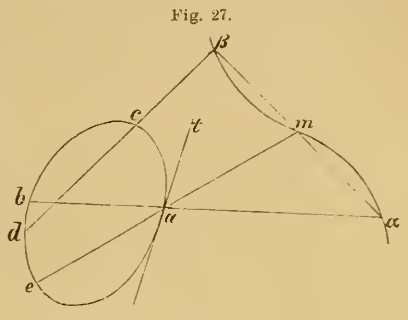
Auflösung. Man ziehe aus c vier Strahlen, welche die Curve u in den Punctepaaren ab, $a'b'$, $a''b''$, $a'''b'''$ schneiden, und bestimme auf jedem Strahl den in Bezug auf ab etc. zu c zugeordneten harmonischen Punct h. Der Kegelschnitt, welcher durch die fünf Puncte h, h', h'', h''' und c geht, ist die gesuchte conische Polare. — Aus [277].

308. Aufgabe. An eine gegebene Curve 3. O. in einem gegebenen Puncte a die Tangente zu construiren.

Auflösung 1. Man construire nach [307] die vier Puncte h, h', h'', h''', welche mit a die conische Polare von a bestimmen, und an diesen Kegelschnitt die Tangente in a, so ist diese nach [269] die verlangte Tangente.

Auflösung 2. (Fig. 27.) Ziehe durch a zwei beliebige Gerade, welche die Curve resp. in b, α und e, m schneiden, schneide die Curve ferner mit $\alpha\, m$ in β, und mit einer beliebigen durch β gehenden Geraden in c und d; construirt man dann an den durch $a\ b\ c\ d\ e$ gehenden Kegelschnitt die Tangente $a\,t$ in a, so ist dies zugleich die verlangte Tangente an der Curve.

Fig. 27.



Beweis. Betrachtet man $a\ b\ c\ d$ als Basispuncte eines Kegelschnittbüschels und das Geradenpaar ab, cd als einen Kegelschnitt desselben, so ist nach [240] m der den vier Puncten $a\ b\ c\ d$ gegenüberliegende Punct. Alsdann ist der durch e gehende Kegelschnitt des Büschels der dem Strahl $m\ a\ e$ entsprechende, und daher [238] berührt derselbe die Curve in a. (Mittheilung von Herrn Prof. *Küpper*). Vgl. auch [258].

309. Aufgabe. Aus einem gegebenen Puncte m alle Tangenten an eine Curve 3. O. zu construiren.

Auflösung. Man construire nach [306] oder [307] die conische Polare des Punctes m, so sind die Durchschnitte derselben mit der Curve die Berührungspuncte der von m an die Curve gehenden Tangenten [270].

310. Aufgabe. In einem Puncte m einer Curve 3. O. den Krümmungskreis zu construiren.

Auflösung. Man schneide die Curve mit einer beliebigen Geraden in a, a', a'', und mit den Geraden ma, ma', ma'' in b, b', b''. Construire ferner nach [308] in m die Tangente mt an der Curve, und dann in m den Krümmungskreis desjenigen Kegelschnittes, welcher durch b, b', b'' geht und die Gerade mt in m berührt, so ist dieser Krümmungskreis

der verlangte. — Denn nach [232] hat der erwähnte Kegelschnitt in m mit der Curve eine dreipunctige Berührung.

Vierter Abschnitt.

Die Poloconik (conische Polare) einer Geraden.

§. 1.

311. Die Einhüllende der geraden Polaren (bezüglich einer Curve 3. O. $u = 0$) aller Puncte y, welche auf einer Geraden G liegen, ist ein Kegelschnitt und heisst die Poloconik (*Cremona* art. 136) oder die conische Polare der Geraden G (*Salmon* pag. 151.), er soll im Folgenden mit Π_g bezeichnet werden.*) Ist

(1) $$a_1 y_1 + a_2 y_2 + a_3 y_3 = 0$$

die Gleichung der Geraden, so ist die Gleichung ihrer Poloconik

$$\Pi_g = \begin{vmatrix} 0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ a_2 & u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ a_3 & u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Beweis. Die Gleichung der geraden Polare P eines Punctes y ist bei veränderlichen x_i nach [267]

$$\Delta_y^2(u_x) = 0$$

oder ausgeschrieben

(2) $$P = y_1^2 u_{11} + y_2^2 u_{22} + y_3^2 u_{33} + 2 y_2 y_3 u_{23} + 2 y_3 y_1 u_{31} + 2 y_1 y_2 u_{12} = 0.$$

Aendert nun y seine Lage längs der Geraden (1), so findet man die Einhüllende seiner geraden Polaren, wenn man die Verhältnisse der y_i der Gleichung (1) gemäss als Functionen eines veränderlichen Parameters c betrachtet, und c aus den Gleichungen

---

*) Bei *Cayley* (Memoir on Curves of the third order. Phil. Trans. vol. 147. pag. 416) heisst dieser Kegelschnitt die Lineopolar-Enveloppe der Geraden.

$$P = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial P}{\partial c} = 0$$

eliminirt. Zu diesem Zwecke setze man

$$\frac{y_1}{y_3} = p \qquad \frac{y_2}{y_3} = q,$$

ziehe aus P den gemeinschaftlichen Factor y_3^2 heraus und schreibe das Resultat

$$P = y_3^2\, P'(p, q);$$

dann ist

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{\partial P}{\partial y_1} = y_3^2 \frac{\partial P'}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial y_1} = y_3 \frac{\partial P'}{\partial p} \\ \frac{\partial P}{\partial y_2} = y_3^2 \frac{\partial P'}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial y_2} = y_3 \frac{\partial P'}{\partial q}. \end{cases}$$

Führt man p und q auch in (1) ein, so wird diese Gleichung

$$a_1 p + a_2 q + a_3 = 0.$$

Betrachtet man nun p und q als Functionen von c und differentiirt die Gleichung $P' = 0$ und die vorige nach c, so erhält man

$$\frac{\partial P'}{\partial p} \frac{dp}{dc} + \frac{\partial P'}{\partial q} \frac{dq}{dc} = 0$$

$$a_1 \frac{dp}{dc} + a_2 \frac{dq}{dc} = 0,$$

und hieraus folgt

$$\frac{\partial P'}{\partial p} : \frac{\partial P'}{\partial q} = a_1 : a_2$$

und daher auch wegen (3)

$$\frac{\partial P}{\partial y_1} : \frac{\partial P}{\partial y_2} = a_1 : a_2$$

oder mit Anwendung eines Proportionalitätsfactors 2ϱ

$$(4) \qquad \frac{\partial P}{\partial y_1} = 2\varrho a_1 \qquad \frac{\partial P}{\partial y_2} = 2\varrho a_2.$$

Differentiirt man aber (1) und (2) nach c, indem man y_1, y_2, y_3 als Functionen von c betrachtet, so erhält man

$$a_1 \frac{dy_1}{dc} + a_2 \frac{dy_2}{dc} + a_3 \frac{dy_3}{dc} = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial y_1} \frac{dy_1}{dc} + \frac{\partial P}{\partial y_2} \frac{dy_2}{dc} + \frac{\partial P}{\partial y_3} \frac{dy_3}{dc} = 0.$$

Darin verwandelt sich die zweite Gleichung durch Anwendung von (4) in

$$2\varrho a_1 \frac{dy_1}{dc} + 2\varrho a_2 \frac{dy_2}{dc} + \frac{\partial P}{\partial y_3}\frac{dy_3}{dc} = 0$$

und zeigt dann durch Vergleichung mit der ersten, dass auch

$$\frac{\partial P}{\partial y_3} = 2\varrho a_3$$

ist. Man hat also

$$(5) \qquad \frac{\partial P}{\partial y_1} : \frac{\partial P}{\partial y_2} : \frac{\partial P}{\partial y_3} = a_1 : a_2 : a_3,$$

oder wenn man diese Differentialquotienten bildet, die drei Gleichungen

$$u_{11}\, y_1 + u_{12}\, y_2 + u_{13}\, y_3 = \varrho\, a_1$$
$$u_{21}\, y_1 + u_{22}\, y_2 + u_{23}\, y_3 = \varrho\, a_2$$
$$u_{31}\, y_1 + u_{32}\, y_2 + u_{33}\, y_3 = \varrho\, a_3.$$

Eliminirt man aus diesen und $P = 0$ die y_i, so erhält man die Gleichung der gesuchten Einhüllenden. Aber da P in Beziehung auf die y_i homogen vom zweiten Grade ist, so ist nach dem *Euler*'schen Satze

$$2\, P = y_1 \frac{\partial P}{\partial y_1} + y_2 \frac{\partial P}{\partial y_2} + y_3 \frac{\partial P}{\partial y_3} = 0,$$

und in Folge von (5) verwandelt sich diese Gleichung in

$$a_1\, y_1 + a_2\, y_2 + a_3\, y_3 = 0;$$

man kann daher die y_i auch aus dieser und den obigen drei Gleichungen eliminiren und erhält dann als Gleichung der Poloconik

$$\begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & a_1 \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & a_2 \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

indem $-\varrho$ als gemeinschaftlicher Factor der Elemente der letzten Columne auftritt und daher weggelassen werden kann. Eine einfache Umstellung verwandelt diese Determinante in die obige.

312. Die gerade Polare des Durchschnittspunctes m zweier Geraden G, G' ist eine gemeinschaftliche Tangente an den Poloconiken dieser beiden Geraden. — Denn da m sowohl auf G als auch auf G' liegt, so berührt seine gerade Polare sowohl die Poloconik von G, als auch die von G' [311].

313. Berührt eine Gerade G die Curve 3. O. $u = 0$ in einem Puncte x, so berührt auch die Poloconik von G die Curve in dem nämlichen Puncte, sodass G in x gemeinschaftliche Tangente an der Curve und an der Poloconik von G ist. (*Salmon* pag. 151.)

Beweis. Die Gerade G hat mit der Curve in x zwei Puncte gemeinschaftlich, x und x'. Die geraden Polaren von x und x' aber sind die Tangenten an der Curve in x und x' [269] und zugleich Tangenten an der Poloconik von G [311]. Da sie ferner ebenso wie x und x' zusammenfallen, so liegt der Berührungspunct der letzteren in x [187].

314. Bestimmt man für jeden Punct y einer Geraden G die conische Polare bezüglich einer Curve 3. O. (diese Kegelschnitte bilden einen Büschel [284]), und nimmt für jeden dieser Puncte die Polare bezüglich der zugehörigen conischen Polare, so ist die Einhüllende dieser Geraden die Poloconik von G. — Denn die Polare eines Punctes y bezüglich der conischen Polare von y ist zugleich die gerade Polare von y bezüglich der Curve [274]; daher kommt man wieder auf [311] zurück.

315. Bestimmt man für jeden Punct einer Geraden G die conische Polare bezüglich einer Curve 3. O. und nimmt in Bezug auf jeden dieser Kegelschnitte den Pol der Geraden G, so ist der geometrische Ort dieser Pole die Poloconik von G. (*Cremona* art. 136.)

Beweis. Die Gleichung (2) $P = 0$ in [311] stellt bei veränderlichen y_i die conische Polare eines Punctes x dar [267]. Nimmt man an, dass dieser auf der Geraden G liegt, also der Gleichung

$$(1) \qquad a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0$$

genügt, so erhält man den Pol y dieser Geraden bezüglich des Kegelschnittes $P = 0$ nach [97] aus den Gleichungen

$$\frac{\partial P}{\partial y_1} : \frac{\partial P}{\partial y_2} : \frac{\partial P}{\partial y_3} = a_1 : a_2 : a_3,$$

die man mit Hülfe eines Proportionalitätsfactors ϱ schreiben kann

$$(2) \quad \begin{aligned} u_{11}\, y_1 + u_{12}\, y_2 + u_{13}\, y_3 &= \varrho\, a_1 \\ u_{21}\, y_1 + u_{22}\, y_2 + u_{23}\, y_3 &= \varrho\, a_2 \\ u_{31}\, y_1 + u_{32}\, y_2 + u_{33}\, y_3 &= \varrho\, a_3. \end{aligned}$$

Eliminirt man hieraus und aus (1) die x_i, so erhält man die Gleichung des gesuchten geometrischen Ortes in veränderlichen y_i. Allein die vorigen Gleichungen bleiben vollständig ungeändert, wenn man in ihnen die y_i mit den x_i vertauscht. Denn nach [1] kann man z. B. bei der ersten dieser Gleichungen schreiben:

$$u_{11} y_1 + u_{12} y_2 + u_{13} y_3 = \varDelta_y \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right).$$

Da aber $\frac{\partial u}{\partial x_1}$ vom zweiten Grade ist, so hat man nach [5] die Identität

$$\varDelta_y \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right) = \varDelta_x \left(\frac{\partial u}{\partial y_1}\right),$$

d. h. dieser Ausdruck bleibt ungeändert, wenn darin die x_i mit den y_i vertauscht werden. Setzt man daher auch in (1) die y_i statt der x_i, so wird man den gesuchten geometrischen Ort auch erhalten und zwar in veränderlichen x_i, wenn man die y_i aus den Gleichungen (2) und aus $a_1 y_1 + a_2 y_2 + a_3 y_3 = 0$ eliminirt. Dieses aber ist die in [311] ausgeführte Operation, welche die Gleichung der Poloconik von G lieferte. (*Salmon*. pag. 152.)

§. 2.

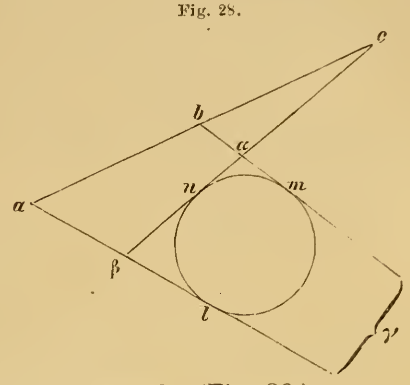
316. Ist a ein Punct der Geraden G, C_a die conische Polare von a, und a' der Pol von G bezüglich C_a, so ist a' zugleich der Punct, in welchem die gerade Polare von a die Poloconik von G berührt. — Denn die gerade Polare von a ist zugleich Polare von a bezüglich C_a [274], geht also durch a' [100]; aber a' liegt auf der Poloconik [315], und die gerade Polare von a berührt die letztere [311], also muss a' der Berührungspunct sein.

317. Der geometrische Ort der Mittelpuncte derjenigen Kegelschnitte, welche die conischen Polaren der unendlich fernen Puncte bilden, ist ein Kegelschnitt, nämlich die Poloconik der unendlich fernen Geraden. — Aus [315], denn die

unendlich fernen Puncte liegen auf einer Geraden [16], und der Pol der unendlich fernen Geraden in Bezug auf jeden Kegelschnitt ist dessen Mittelpunct. (*Salmon.* pag. 152.)

318. Sind $a\ b\ c$ die Puncte, in welchen eine Gerade G die Curve 3. O. trifft, und schneiden sich die in diesen Puncten an die Curve gelegten Tangenten in $\alpha\ \beta\ \gamma$, so ist die Poloconik von G ein dem Dreieck $\alpha\beta\gamma$ eingeschriebener Kegelschnitt, so zwar dass die Berührungspuncte l, m, n den Puncten a, b, c in Bezug auf die Ecken $\beta\gamma, \gamma\alpha, \alpha\beta$ des Tangentendreieckes harmonisch zugeordnet sind. (Fig. 28.)

Fig. 28.



Beweis. Die geraden Polaren von a, b, c sind die Tangenten $a\ \beta\ \gamma$, $b\ \gamma\ \alpha$, $c\ \alpha\ \beta$ [269]; diese berühren also die Poloconik [311]. Nimmt man ausserdem das Tangentendreieck zum Fundamentaldreieck $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, so hat die gerade Polare P eines auf der Geraden G liegenden Puncts y in Bezug auf das Tangentendreieck und daher [294] auch in Bezug auf die Curve nach [290] die Gleichung

$$P = \frac{x_1}{y_1} + \frac{x_2}{y_2} + \frac{x_3}{y_3} = 0.$$

Ist nun

$$a_1 y_1 + a_2 y_2 + a_3 y_3 = 0$$

die Gleichung der Geraden G, so erhält man nach [311] die Gleichung der Poloconik, wenn man bildet

$$a_1 : a_2 : a_3 = \frac{\partial P}{\partial y_1} : \frac{\partial P}{\partial y_2} : \frac{\partial P}{\partial y_3} = \frac{x_1}{y_1^2} : \frac{x_2}{y_2^2} : \frac{x_3}{y_3^2}$$

und hieraus und aus $P = 0$ die y_i eliminirt. Man erhält aber

$$y_1 = \varrho \sqrt{\frac{x_1}{a_1}},\quad y_2 = \varrho \sqrt{\frac{x_2}{a_2}},\quad y_3 = \varrho \sqrt{\frac{x_3}{a_3}};$$

und dies in $P = 0$ substituirt giebt

$$\sqrt{a_1 x_1} + \sqrt{a_2 x_2} + \sqrt{a_3 x_3} = 0.$$

Dieses aber ist nach [103] ein Kegelschnitt, welcher dem Fundamentaldreieck so eingeschrieben ist, wie der Satz aussagt. (*Salmon.* pag. 153.)

319. Die Poloconik Π_∞ der unendlich fernen Geraden ist der Kegelschnitt, welcher dem von den Asymptoten gebildeten Dreieck eingeschrieben ist und die Seiten desselben in deren Mitten berührt. — Aus [318], denn wenn a, b, c ins Unendliche rücken, so werden $a\,\beta\,\gamma$, $b\,\gamma\,\alpha$, $c\,\alpha\,\beta$ die Asymptoten und l, m, n bilden die Mitten von $\beta\,\gamma$, $\gamma\,\alpha$, $\alpha\,\beta$. (*Salmon.* pag. 153.)

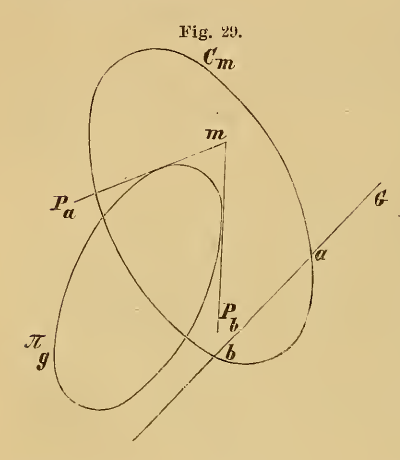


Fig. 29.

320. Die von einem Puncte m an die Poloconik Π_g einer Geraden G gehenden Tangenten sind die geraden Polaren P_a, P_b derjenigen Puncte a, b, in welchen die Gerade G die conische Polare C_m von m schneidet. (Fig. 29.)

Beweis. Die geraden Polaren von a und b sind Tangenten an der Poloconik Π_g [311]. Da aber die conische Polare C_m von m durch a und b geht, so gehen P_a und P_b beide durch m [273].

Zusatz. Hieraus folgt, dass von einem Puncte m zwei reelle oder imaginäre Tangenten an die Poloconik von G gehen, je nachdem die conische Polare von m von der Geraden G in zwei reellen oder imaginären Puncten getroffen wird; und umgekehrt. (*Salmon.* pag. 153.)

321. Berührt eine Gerade G (Fig. 29) die conische Polare C_m eines Punctes m in a (allgemeiner, hat C_m mit G zwei in a zusammenfallende Puncte gemein), so geht die Poloconik Π_g von G durch m, und die gerade Polare von a berührt die Poloconik in m (allgemeiner, hat in m mit der Poloconik zwei zusammenfallende Puncte gemein). Und umgekehrt: Liegt ein Punct m auf der Poloconik Π_g einer Geraden G, so berührt die conische Polare von m die Gerade G in einem Puncte a, dessen gerade Polare die Tangente in m an der Poloconik ist.

— Aus [320], wenn b mit a und daher auch P_b mit P_a zusammenfällt.

322. Hieraus folgt: Die Poloconik einer Geraden G ist der geometrische Ort der Puncte, deren conische Polaren die Gerade G berühren. (*Cremona.* art. 136.) Und: Die conische Polare eines Puncts m ist die Einhüllende der Geraden, deren Poloconiken durch m hindurchgehen. (*Cremona.* art. 136. a.)

323. Geht die Poloconik einer Geraden G durch zwei Puncte m und m', so ist G eine gemeinschaftliche Tangente an den conischen Polaren von m und m'. Und umgekehrt: Ist G eine gemeinschaftliche Tangente an den conischen Polaren zweier Puncte m und m', so geht die Poloconik von G durch m und m' hindurch. — Aus [321].

324. Durch die nämlichen zwei Puncte m und m' gehen vier Poloconiken, nämlich diejenigen, deren zugehörige Geraden die vier gemeinschaftlichen Tangenten der conischen Polaren von m und m' sind. [323.]

325. Die conische Polare eines Punctes m ist eine Ellipse, Hyperbel oder Parabel, je nachdem m innerhalb, ausserhalb oder auf dem Kegelschnitte Π_∞ liegt, der die Seiten des Asymptotendreiecks in deren Mitten berührt. (Dabei soll ein Punct m innerhalb oder ausserhalb eines Kegelschnitts liegend genannt werden, je nachdem von ihm zwei imaginäre oder reelle Tangenten an den Kegelschnitt gehen.)

B e w e i s. Der Kegelschnitt Π_∞ ist die Poloconik der unendlich fernen Geraden [319]. Je nachdem von m zwei imaginäre, reelle oder zusammenfallende Tangenten an Π_∞ gehen, schneidet die unendlich ferne Gerade die conische Polare von m in zwei imaginären, reellen, oder zusammenfallenden Puncten [320]. (*Salmon.* pag. 153.)

326. Hat eine Curve 3. O. einen Doppelpunct, so liegt derselbe, je nachdem er ein eigentlicher Doppelpunct, ein isolirter Punct oder ein Rückkehrpunct ist, ausserhalb, innerhalb oder auf dem Kegelschnitte Π_∞, welcher die Seiten des Asymptotendreieckes in deren Mitten berührt. — Denn die conische Polare des Doppelpuncts ist das Tangentenpaar in diesem [267]. Das letztere aber ist in den drei erwähnten Fällen reell, imaginär oder zusammenfallend [153] und wird

daher von der unendlich fernen Geraden in zwei reellen, imaginären oder zusammenfallenden Puncten geschnitten. Der Doppelpunct liegt also nach [320, 325] in den drei Fällen ausserhalb, innerhalb oder auf der Poloconik der unendlich fernen Geraden. (*Plücker.* System der anal. Geom. pag. 196. *Salmon.* pag. 153.)

§. 3.

327. Wenn die Poloconik einer Geraden G aus zwei Geraden besteht, die sich in m schneiden, so besteht die conische Polare von m aus zwei Geraden, von denen die eine G ist.

Beweis. Da die geraden Polaren aller Puncte von G die Poloconik berühren d. h. in zwei susammenfallenden Puncten schneiden, [311], so gehen sie in diesem Falle alle durch m hindurch, dann aber geht nach [273] die conische Polare von m durch alle Puncte von G; d. h. diese Gerade bildet einen Theil der conischen Polare von m.

328. Bildet eine Gerade G einen Theil der conischen Polare C_m eines Puncts m, so besteht die Poloconik von G aus zwei Geraden, die sich in dem Pole m von C_m schneiden.

Beweis. Man kann in diesem Falle die Gerade G in jedem ihrer Puncte als eine Tangente an der conischen Polare C_m von m betrachten. Dann aber müssen nach [321] die geraden Polaren aller Puncte von G die Poloconik Π_g in zwei in m zusammenfallenden Puncten schneiden, und daher muss diese Poloconik aus zwei sich in m treffenden Geraden bestehn.

329. Daraus folgt: Die Poloconiken der beiden Geraden G und G', welche zusammen die conische Polare eines Punctes m bilden, bestehen aus zwei Geradenpaaren die in m ihren gemeinschaftlichen Schnittpunct haben. — Ueber die nähere Bestimmung dieser Poloconiken s. [530].

330. Da der geometrische Ort aller Puncte m, deren conische Polaren aus Geradenpaaren bestehen nach [268] die Hesse'sche Curve ist, so folgt ferner, dass diese Curve auch der geometrische Ort der Doppelpuncte aller aus Geradenpaaren bestehenden Poloconiken ist.

Fünfter Abschnitt.

Die gemischte Poloconik zweier Geraden.

331. Nimmt man zu jedem Puncte einer Geraden G die conische Polare bezüglich einer Curve 3. O. $u = 0$, und bestimmt in Bezug auf jeden dieser Kegelschnitte den Pol einer anderen Geraden G', so ist der geometrische Ort dieser Pole ein Kegelschnitt. Sind

$$G = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0$$

und

$$G' = a_1' x_1 + a_2' x_2 + a_3' x_3 = 0$$

die Gleichungen der Geraden G und G', so ist

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} 0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1' & u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ a_2' & u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ a_3' & u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{vmatrix} = 0$$

die Gleichung des gesuchten geometrischen Ortes.

Beweis. Die conische Polare C eines Punctes x hat in veränderlichen y_i nach [267] die Gleichung

$$C = u_{11} y_1^2 + u_{22} y_2^2 + u_{33} y_3^2 + 2 u_{23} y_2 y_3 + 2 u_{31} y_3 y_1 + 2 u_{12} y_1 y_2 = 0.$$

Man erhält die Coordinaten des Pols y der Geraden G' in Bezug auf C nach [97] aus den Gleichungen

$$\frac{\partial C}{\partial y_1} : \frac{\partial C}{\partial y_2} : \frac{\partial C}{\partial y_3} = a_1' : a_2' : a_3'$$

d. i., wenn ϱ einen Proportionalitätsfactor bedeutet,

$$u_{11} y_1 + u_{12} y_2 + u_{13} y_3 = \varrho a_1'$$
$$u_{21} y_1 + u_{22} y_2 + u_{23} y_3 = \varrho a_2'$$
$$u_{31} y_1 + u_{32} y_2 + u_{33} y_3 = \varrho a_3'.$$

Eliminirt man hieraus und aus $G = 0$ die Coordinaten x_i, so ergiebt sich die Gleichung des gesuchten geometrischen Ortes in veränderlichen y_i. Da aber die vorigen Gleichungen nach [315] ungeändert bleiben, wenn man darin die x mit den y vertauscht, so kann man ebensogut auch die y_i eliminiren, wenn man die Gleichung $G = 0$ in der Form

$$a_1 y_1 + a_2 y_2 + a_3 y_3 = 0$$

schreibt, und erhält dann den gesuchten geometrischen Ort in veränderlichen x_i ausgedrückt. Diese Elimination ergiebt mit Unterdrückung des gemeinschaftlichen Factors — ϱ die obige Gleichung (1).

332. Lässt man im Vorigen die beiden Geraden G und G' ihre Rolle mit einander vertauschen, so erhält man den nämlichen geometrischen Ort wieder. Denn, um die Gleichung des neuen geometrischen Ortes zu erhalten, hat man in der vorigen Determinante nur a_1, a_2, a_3 resp. mit a_1', a_2', a_3' zu vertauschen. Da aber $u_{hk} = u_{kh}$ ist, so besteht der Effect dieser Vertauschung nur darin, dass die Zeilen und Columnen der Determinante mit einander vertauscht sind, wobei dieselbe vollständig ungeändert bleibt.

333. Demnach ist der betrachtete Kegelschnitt der geometrische Ort der Pole irgend einer von zwei Geraden G und G', bezüglich der Kegelschnitte, welche die conischen Polaren der Puncte der anderen Geraden bilden. Dieser Kegelschnitt heisst die gemischte Poloconik der Geraden G und G' (*Cremona.* art. 136. c.) und soll mit $\Pi_{gg'}$ bezeichnet werden. Fallen diese beiden Geraden in eine G zusammen, so verwandelt sich die gemischte Poloconik in die Poloconik der Geraden G, wie aus [315] folgt, oder auch daraus, dass die Determinante in [331] in die von [311] übergeht, wenn a_1' a_2' a_3' resp. gleich a_1, a_2, a_3 sind.

334. Jedem Puncte a auf der Geraden G (oder auch a' auf G') entspricht ein bestimmter Punct m auf der gemischten Poloconik $\Pi_{gg'}$; aber auch umgekehrt: jedem Puncte m auf $\Pi_{gg'}$ entspricht ein bestimmter Punct a auf G, und ein bestimmter a' auf G'; und zwar sind a und a' die Pole von resp. G' und G bezüglich der conischen Polare C_m des Punctes m.

Beweis. Aus a erhält man m folgendermassen: Man bestimme die conische Polare C_a von a und in Bezug auf diese den Pol m von G'; dadurch ist m vollkommen bestimmt. Nimmt man aber für den Punct m die conische Polare C_m, so muss a der Pol von G' in Bezug auf C_m sein, denn nach [275] ist die Polare von a in Bezug auf C_m identisch mit der Polare von m in Bezug auf C_a; wenn also m der Pol von G' in Bezug auf C_a ist, so ist a der Pol von G' in Bezug auf

C_m. Demnach ist a auf G durch eindeutige Operationen aus m auf $\Pi_{gg'}$ bestimmt. Ebenso erhält man a' auf G' als Pol von G in Bezug auf C_m.

335. Hieraus folgt: Die conischen Polaren C_m der auf der gemischten Poloconik $\Pi_{gg'}$ zweier Geraden G, G' liegenden Puncte m haben die Eigenschaft, dass in Beziehung auf sie die Geraden G und G' conjugirte Geraden sind, d. h. dass jede durch den Pol der anderen (in Beziehung auf die betreffende conische Polare) hindurchgeht.

336. Und umgekehrt: Sind G und G' in Beziehung auf eine conische Polare C_m conjugirte Geraden, so liegt der Pol m (bezüglich der Curve 3. O.) dieser conischen Polare auf der gemischten Poloconik von G, G'. — Denn ist a der Pol von G' bezüglich C_m, so ist m gleichzeitig der Pol von G' in Bezug auf C_a [275], und liegt a auf G, so liegt m auf $\Pi_{gg'}$ [331].

337. Mithin: Die gemischte Poloconik zweier Geraden G, G' ist der geometrische Ort der Pole (bezüglich der Curve 3. O.) derjenigen conischen Polaren, in Bezug auf welche G und G' conjugirte Geraden sind. (*Cremona* art. 136. c)

338. Sei α der Durchschnitt der Geraden G, G'. Die gemischte Poloconik $\Pi_{gg'}$ geht durch die beiden Puncte μ, μ' hindurch, in denen die gerade Polare P_α von α die beiden gewöhnlichen Poloconiken von G und G' berührt [312].

Beweis. Da der Punct α gleichzeitig auf beiden Geraden G und G' liegt, so gehören ihm zwei Puncte der gemischten Poloconik $\Pi_{gg'}$ zu [334]. Man findet den einen, μ, wenn man die conische Polare C_α von α aufsucht, und, indem man α als auf G liegend betrachtet, den Pol von G' in Bezug auf C_α nimmt. Allein da α auch zugleich auf G' liegt, so liegt der so bestimmte Punct μ nach [316] auch auf der (gewöhnlichen) Poloconik von G' und ist der Punct, in dem diese von der geraden Polare von α berührt wird. Ebenso ergiebt sich der andere Punct μ' als Pol der Geraden G bezüglich C_α, und ist dann gleichzeitig derjenige Punct der Poloconik von G, in welchem diese von der geraden Polare von α berührt wird. (*Cremona* art. 136. d.)

Sechster Abschnitt.

Wendepuncte, Wendetangenten, harmonische Polaren.

§. 1.

339. Die Hesse'sche Curve $H(u) = 0$ einer Curve 3. O. $u=0$ ist wieder eine Curve 3. O. [152^a], welche die ursprüngliche Curve in ihren Wendepuncten durchschneidet und ausserdem durch die Doppel- und Rückkehrpuncte geht, falls solche existiren [156]. Eine Curve 3. O. ohne Doppel- oder Rückkehrpunct hat daher neun Wendepuncte, und durch diese können unendlich viele Curven 3. O. gelegt werden [218]. Hat die Curve einen Doppelpunct, so besitzt sie drei Wendepuncte, und hat sie einen Rückkehrpunct, nur einen Wendepunct [167]. Jede einfache Curve 3. O. hat daher mindestens einen reellen Wendepunct.

340. Bildet eine Gerade einen Theil der Curve $u = 0$, so bildet sie auch einen Theil der Hesse'schen Curve $H(u) = 0$ [166]. Besteht daher die Curve $u = 0$ aus drei Geraden, so besteht ihre Hesse'sche Curve aus den nämlichen drei Geraden. Hievon macht aber der Fall eine Ausnahme, wenn die drei Geraden sich in einem Puncte schneiden; dann ist die Hesse'sche Curve unbestimmt. Denn nimmt man zwei dieser Geraden zu Seiten $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ des Fundamentaldreiecks, so hat die dritte die Gleichung $x_1 + \lambda x_2 = 0$, und die Gleichung der Curve ist $u = x_1 x_2 (x_1 + \lambda x_2) = 0$. Bildet man nun die Hesse'sche Determinante $H(u)$ [152^a], so verschwinden in ihr die Elemente u_{13}, u_{23}, u_{33}, und folglich ist $H(u)$ selbst identisch Null.*)

341. Die harmonische Polare eines Wendepuncts w ist nach [279] diejenige Gerade, welche die Puncte h, h', h'', etc. verbindet, die zu w harmonisch zugeordnet sind in Beziehung auf die Puncte ab, $a'b'$, $a''b''$, etc., in denen beliebige durch

---

*) Das identische Verschwinden der Hesse'schen Determinante ist überhaupt die Bedingung, dass eine Curve aus Geraden besteht, die in einem Puncte zusammenlaufen (*Hesse*. Ueber die Bedingung etc. Crelle's Journ. Bd. 42. pag. 123) Vgl. auch [84].

w gelegte Secanten die Curve schneiden. Die Berührungspuncte der drei aus w an die Curve gehenden Tangenten liegen daher auch auf dieser Geraden.

342. Zieht man durch einen Curvenpunct w drei Secanten wab, $wa'b'$, $wa''b''$, und liegen die in Bezug auf ab, $a'b'$, $a''b''$ resp. zu w zugeordneten harmonischen Puncte h, h', h'' in einer Geraden, so ist w ein Wendepunct, und daher die Gerade $hh'h''$ die harmonische Polare von w. (*Salmon* Lettre à l'éditeur. Crelle's Journ. Bd. 39. pag. 365.)

Beweis. Wäre w nicht ein Wendepunct, so würden die Puncte h, h', h'' nach [277] auf einem Kegelschnitte, nämlich der conischen Polare von w, liegen, und diese könnte nicht aus zwei Geraden bestehen [268], weil w nicht auf der Hesse'schen Curve liegt.

343. Sind wab und $wa'b'$ zwei Secanten durch einen Wendepunct, so liegen die Schnittpuncte der Geraden aa', bb' und ab', $a'b$ auf der harmonischen Polare von w. (*Maclaurin* l. c. [230] pag. 232.) — Denn die Verbindungslinie dieser Schnittpuncte trifft die Secanten wab und $wa'b'$ in den zu w zugeordneten harmonischen Puncten (Siehe u. a. *Schröter.* Steiner's Vorlesungen §. 9).

344. Ist wab eine Secante durch einen Wendepunct w, so schneiden sich die Tangenten in a und b auf der harmonischen Polare von w. — Aus [343], wenn a' mit a, und b' mit b zusammenfällt. (*Maclaurin* l. c. [230] pag. 232.)

345. Legt man durch einen Wendepunct w drei Secanten wab, $wa'b'$, $wa''b''$, so liegen die sechs Puncte ab, $a'b'$, $a''b''$, auf einem Kegelschnitt. — Aus [225], da in dem Wendepuncte drei in gerader Linie liegende Curvenpuncte vereinigt sind. (*Serret* Alg. sup. II. pag. 586. *Cremona* art. 39. c.)

346. Wenn die sechs Puncte ab, $a'b'$, $a''b''$, in welchen drei durch einen Curvenpunct w gelegte Secanten die Curve schneiden, in einem Kegelschnitte liegen, so ist w ein Wendepunct der Curve. — Denn da die drei Geraden wab, $wa'b'$, $wa''b''$ eine Curve 3. O. bilden, und sechs ihrer Schnittpuncte mit der gegebenen Curve 3. O. auf einem Kegelschnitte liegen, so befinden sich die drei in w vereinigten Schnittpuncte nach [220] in einer Geraden. (*Serret* Alg. sup. II. pag. 586.)

347. Sind a, a', a'' drei in gerader Linie liegende Curvenpuncte, und zieht man durch sie und durch einen Wendepunct w drei Gerade, welche die Curve in b, b', b'' treffen, so liegen diese drei Puncte ebenfalls in einer Geraden, und die Geraden $a a' a''$ und $b b' b''$ treffen sich auf der harmonischen Polare von w. — Aus [345]; denn liegen von den sechs Puncten des Kegelschnitts ab, $a'b'$, $a''b''$ drei in einer Geraden, so haben die übrigen drei dieselbe Eigenschaft. Das übrige folgt aus [343]. (*Cremona* art. 39. c.)

348. Schneidet eine durch einen Wendepunct w gezogene Gerade die Curve in a und b, so giebt es einen Kegelschnitt, welcher die Curve sowohl in a als auch in b dreipunctig berührt. — Denn lässt man in [345] die drei Geraden wab, $wa'b'$, $wa''b''$ in wab zusammenfallen, so hat der durch ab, $a'b'$, $a''b''$ gehende Kegelschnitt sowohl in a als auch in b drei Puncte mit der Curve gemein. *Poncelet.* Analyse des transversales. Crelle's Journ. Bd. 8. pag. 134. *Cremona* art. 39. d.)

349. Und ebenso folgt aus [346]: Wenn ein Kegelschnitt eine Curve 3. O. in zwei Puncten a und b dreipunctig berührt, so trifft die Gerade ab die Curve in einem Wendepuncte.

350. Ist a der Berührungspunct einer aus einem Wendepuncte an die Curve gezogenen Tangente, so giebt es einen Kegelschnitt, welcher die Curve in a sechspunctig berührt. — Aus [348], wenn a und b zusammenfallen. (*Cremona* art. 39. d.)

351. Es giebt auf einer Curve 3. O. 27 Puncte, in denen sie eine sechspunctige Berührung mit einem Kegelschnitte hat; nämlich die Berührungspuncte der 27 aus den 9 Wendepuncten an die Curve gehenden Tangenten. — Aus [350]; und dieses sind die einzigen Puncte von der erwähnten Eigenschaft, denn sobald ein Punct diese Eigenschaft besitzt, so ist sein Tangentialpunct nach [349] ein Wendepunct. (*Steiner.* Geometrische Lehrsätze. Crelle's Journ. Bd. 32. pag. 182.)

§. 2.

352. Die Gerade, welche zwei Wendepuncte einer Curve 3. O. verbindet, trifft die Curve allemal in einem dritten Wendepuncte. (*Maclaurin* l. c. [230] pag. 231. *Salmon*, pag. 46. *Cremona* art. 139. b.)

Beweis 1. Zieht man durch zwei Wendepuncte w, w' je eine Gerade, welche die Curve in resp. ab und $a'b'$ treffen, und schneidet dann die Curve mit den Geraden ww', aa', bb' in $w''\ a''\ c''$, so liegen die drei letzten Puncte nach [229] ebenfalls in einer Geraden. Dreht man nun die Geraden ab und $a'b'$ um w und w' herum, bis sie Tangenten an der Curve werden, so fallen a und b beide in w, und a', b' in w' hinein, weil w und w' Wendepuncte sind. Demnach fallen die Geraden $a a' a''$ und $b b' b''$ beide mit $w w' w''$ zusammen, und folglich auch die Puncte a'', b'' mit w''. Die Gerade $w'' a'' b''$ hat also dann in w'' drei zusammenfallende Puncte mit der Curve gemein, sie ist daher eine Wendetangente und w'' ein Wendepunct, denn der nach [212] ebenfalls mögliche Fall, dass w'' ein Doppelpunct wäre, kann hier nicht stattfinden, weil dann die Gerade $w w' w''$ vier Puncte mit der Curve gemein hätte. (*Serret.* Alg. sup. II. pag. 580.)

Beweis 2. Bedeuten A, B, C, D lineare Ausdrücke, und k eine Constante, so kann die Gleichung einer Curve 3. O. auf die Form

$$A\,B\,C - k\,D^3 = 0$$

gebracht werden, weil man dabei über neun Constanten verfügen kann. Alsdann trifft die Gerade $A = 0$ die Curve in drei zusammenfallenden Puncten da, wo sie von der Geraden $D = 0$ getroffen wird. Dasselbe gilt von den Geraden $B = 0$ und $C = 0$, folglich sind diese drei Geraden Wendetangenten, und ihre Durchschnitte mit der Curve, d. h. die Wendepuncte liegen in der Geraden $D = 0$. Von diesen Durchschnitten kann keiner ein Doppelpunct sein, weil sonst die Gerade $D = 0$ vier Puncte mit der Curve gemein hätte. (*Salmon* pag. 136.)

Beweis 3. Lässt man in [347] die drei in gerader Linie liegenden Puncte $a a' a''$ zusammenfallen, so entsteht ein Wendepunct; dann fallen auch die Puncte $b b' b''$ in einen Wendepunct zusammen (*Salmon* pag. 140.)

353. Die neun Wendepuncte einer Curve 3. O. liegen zu je drei in zwölf Geraden, von denen durch jeden Wendepunct vier hindurchgehen. Diese zwölf Geraden theilen sich in vier Gruppen zu je drei Geraden, von der Art, dass in

jeder Gruppe alle neun Wendepuncte enthalten sind. (*Plücker.* System der analytischen Geom. pag. 284.)

Beweis. Da eine durch zwei Wendepuncte gezogene Gerade jedesmal noch einen dritten Wendepunct enthält [352], so kann man durch jeden Wendepunct vier Gerade legen, welche die acht übrigen Wendepuncte enthalten. Man erhält dadurch 36 Gerade, von denen aber jede drei Wendepuncte enthält und daher dreimal gezählt ist. Von diesen 36 Geraden sind demnach 12 untereinander verschieden, und von diesen zwölf gehen durch jeden Wendepunct vier. Sind nun etwa 1, 2, 3 drei in einer Geraden liegende Wendepuncte, so kann man durch jeden dieser Puncte ausser der Geraden 123 nur noch drei Gerade ziehen. Man erhält demnach nur zehn Gerade, von denen jede mindestens einen der drei Puncte 1, 2, 3 enthält. Es bleiben also noch zwei Gerade übrig, die durch keinen dieser Puncte gehen. Eine von diesen beiden Geraden enthält daher drei der übrigen sechs Wendepuncte, und da die neun Wendepuncte die Durchschnitte zweier Curven 3. O. sind [339], so müssen nach [224] die drei letzten ebenfalls in einer Geraden liegen. Wenn man also von einer der vier Geraden ausgeht, welche durch einen bestimmten Wendepunct gehn, so gelangt man auf die eben angegebene Art zu einer Gruppe von drei Geraden, welche alle Wendepuncte enthalten; und folglich giebt es vier solcher Gruppen. (*Serret.* Alg. sup. II. pag. 581.)

354. Man übersieht die Vertheilung der neun Wendepuncte auf die zwölf Geraden in einfacher Weise, wenn man die Gleichung der Curve 3. O. auf die Form

$$\lambda^3 A^3 + \mu^3 B^3 + \nu^3 C^3 - 3 k A B C = 0$$

bringt, worin A, B, C lineare Ausdrücke, und k, λ, μ, ν Constanten bedeuten. Dies ist immer möglich, weil man über neun Constanten verfügen kann. Setzt man darin der Einfachheit wegen A, B, C für resp. λA, μB, νC, und k für $\frac{k}{\lambda \mu \nu}$, so reducirt sich die vorige Gleichung auf

$$(1) \qquad A^3 + B^3 + C^3 - 3k ABC = 0,$$

und diese lässt sich in folgenden drei Formen schreiben

$$k^3 A^3 + B^3 + C^3 - 3k\, ABC = (k^3 - 1)\, A^3$$
$$A^3 + k^3 B^3 + C^3 - 3k\, ABC = (k^3 - 1)\, B^3$$
$$A^3 + B^3 + k^3 C^3 - 3k\, ABC = (k^3 - 1)\, C^3.$$

Bedeutet nun α eine imaginäre Cubikwurzel der Einheit, so können die linken Theile dieser Gleichungen nach [10] in lineare Factoren zerlegt werden; man erhält dadurch

$$(kA + B + C)\,(kA + \alpha B + \alpha^2 C)\,(kA + \alpha^2 B + \alpha C) = (k^3 - 1)\, A^3$$
$$(A + kB + C)\,(\alpha^2 A + kB + \alpha C)\,(\alpha A + kB + \alpha^2 C) = (k^3 - 1)\, B^3$$
$$(A + B + kC)\,(\alpha A + \alpha^2 B + kC)\,(\alpha^2 A + \alpha B + kC) = (k^3 - 1)\, C^3.$$

Jede dieser Gleichungen hat die in [352] betrachtete Form; daher ist jede der drei Geraden A, B, C die Verbindungslinie dreier Wendepuncte (*Salmon.* pag. 136), und die links stehenden neun linearen Factoren stellen, gleich Null gesetzt, die neun Wendetangenten dar. Die Wendepuncte sind nun die Durchschnitte der Geraden A, B, C mit den Wendetangenten, also folgende Durchschnitte:

$A = 0$ mit $kA + B + C = 0$, $kA + \alpha B + \alpha^2 C = 0$, $kA + \alpha^2 B + \alpha C = 0$
$B = 0$ „ $A + kB + C = 0$, $\alpha^2 A + kB + \alpha C = 0$, $\alpha A + kB + \alpha^2 C = 0$
$C = 0$ „ $A + B + kC = 0$, $\alpha A + \alpha^2 B + kC = 0$, $\alpha^2 A + \alpha B + kC = 0$.

Daraus folgt aber, dass dieselben Puncte auch als die Durchschnitte folgender Geraden dargestellt werden können:

$$(2)\quad \begin{cases} A = 0 \text{ mit } B + C = 0,\ B + \alpha C = 0,\ \alpha B + C = 0 \\ B = 0 \quad\text{„}\quad C + A = 0,\ C + \alpha A = 0,\ \alpha C + A = 0 \\ C = 0 \quad\text{„}\quad A + B = 0,\ A + \alpha B = 0,\ \alpha A + B = 0. \end{cases}$$

Nimmt man nun die Geraden A, B, C als Seiten des Fundamentaldreieckes an, und bezeichnet die Wendepuncte dem vorigen Schema gemäss der Reihe nach mit 1, 2, 3, ... 9, so werden die Coordinaten derselben folgenden Werthen proportional

$$(3)\quad \begin{cases} 1)\ 0, +1, -1 \quad 2)\ 0, +\alpha, -1 \quad 3)\ 0, +1, -\alpha \\ 4)\ -1, 0, +1 \quad 5)\ -1, 0, +\alpha \quad 6)\ -\alpha, 0, +1 \\ 7)\ +1, -1, 0 \quad 8)\ +\alpha, -1, 0 \quad 9)\ +1, -\alpha, 0; \end{cases}$$

und dann ergiebt sich, dass von den neun Wendepuncten drei, nämlich 1, 4, 7, reell, die übrigen sechs aber imaginär

sind. Von den zwölf Geraden, welche durch die Wendepuncte gehen, erhalten wir sofort vier, nämlich

$$A = 1\,2\,3 \qquad B = 4\,5\,6 \qquad C = 7\,8\,9$$

und ausserdem 1 4 7, weil die Determinante der neun Coordinaten dieser drei Puncte verschwindet [18]. Man könnte ebenso, indem man zusieht, von welchen Puncten die Determinante der Coordinaten Null wird, die noch übrigen Geraden finden. Man gelangt aber zu diesen auch durch eine andere Betrachtung, welche sofort die Gleichungen derselben liefert. Schreibt man nämlich die Gleichung (1) in folgenden Formen

$$(4) \quad \begin{cases} A^3 + B^3 + C^3 - 3\,ABC = 3\,(k-1)\,ABC \\ A^3 + B^3 + C^3 - 3\alpha\,ABC = 3\,(k-\alpha)\,ABC \\ A^3 + B^3 + C^3 - 3\alpha^2\,ABC = 3\,(k-\alpha^2)\,ABC, \end{cases}$$

so kann man die linken Theile nach [10] wieder in lineare Factoren zerlegen und erhält

$$(A+B+C)\,(A+\alpha B+\alpha^2 C)\,(A+\alpha^2 B+\alpha C) = 3\,(k-1)\,ABC$$
$$\alpha^2(\alpha A+B+C)\,(A+\alpha B+C)\,(A+B+\alpha C) = 3(k-\alpha)\,ABC$$
$$\alpha(\alpha^2 A+B+C)\,(A+\alpha^2 B+C)(A+B+\alpha^2 C)=3(k-\alpha^2)\,ABC.$$

Nun wissen wir schon, dass die Durchschnitte der Geraden A, B, C mit der Curve die neun Wendepuncte sind. Nach den vorigen Gleichungen aber stellen sich diese dar, als die Durchschnitte dieser Geraden

$$A = 0 \qquad B = 0 \qquad C = 0$$

mit folgenden neun anderen

$$A' = A+B+C=0, \quad B'=A+\alpha B+\alpha^2 C=0, \quad C'=A+\alpha^2 B+\alpha C=0$$
$$A'' = \alpha A+B+C=0, \quad B''=A+\alpha B+C=0, \quad C''=A+B+\alpha C=0$$
$$A''' = \alpha^2 A+B+C=0, \quad B'''=A+\alpha^2 B+C=0, \quad C'''=A+B+\alpha^2 C=0$$

Diese sind demnach die zwölf in Rede stehenden Geraden; wie man sieht, sind vier von ihnen reell, und acht imaginär. Substituirt man in die vorigen Gleichungen die Werthe $A=0$, $B=0$, $C=0$ und vergleicht die Resultate mit (2) und der in (3) angewendeten Bezeichnung, so ergiebt sich, dass die Durchschnitte der Geraden A, B, C mit A', B', etc. folgende Wendepuncte liefern:

$$(AA')=1\ (AB')=2\ (AC')=3 \quad\Big|\quad (AA'')=1\ (AB'')=3\ (AC'')=2$$
$$(BA')=4\ (BB')=5\ (BC')=6 \quad\Big|\quad (BA'')=5\ (BB'')=4\ (BC'')=6$$
$$(CA')=7\ (CB')=8\ (CC')=9 \quad\Big|\quad (CA'')=9\ (CB'')=8\ (CC'')=7$$
$$(AA''')=1 \quad (AB''')=2 \quad (AC''')=3$$
$$(BA''')=6 \quad (BB''')=4 \quad (BC''')=5$$
$$(CA''')=8 \quad (CB''')=9 \quad (CC''')=7.$$

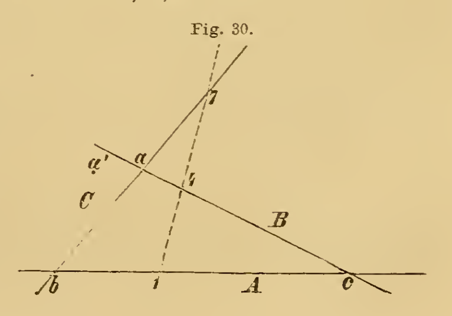
Die zwölf Geraden verbinden also folgende Wendepuncte

$$A=123 \qquad A'=147 \qquad A''=159 \qquad A'''=168$$
$$B=456 \qquad B'=258 \qquad B''=348 \qquad B'''=249$$
$$C=789 \qquad C'=369 \qquad C''=267 \qquad C'''=357$$

und bilden in dieser Anordnung die vier Gruppen, von denen jede alle Wendepuncte enthält. Jede dieser Gruppen bildet ein Dreieck, nämlich ABC, $A'B'C'$, $A''B''C''$, $A'''B'''C'''$. Bezeichnet man die den Seiten derselben resp. gegenüberliegenden Ecken mit abc, $a'b'c'$, $a''b''c''$, $a'''b'''c'''$, so erhält man auch die Coordinaten dieser Puncte (entweder durch Auflösung je zweier der obigen Gleichungen für A', B', etc. oder, indem man beachtet, dass die Coordinaten jedesmal so zu wählen sind, dass die identische Gleichung $1+\alpha+\alpha^2=0$ entsteht, und dass abc die Ecken des Fundamentaldreieckes sind) folgendermassen:

$$BC=a\ldots 1,0,0 \qquad B'C'=a'\ldots 1,1,1 \qquad B''C''=a''\ldots 1,\alpha,\alpha$$
$$CA=b\ldots 0,1,0 \qquad C'A'=b'\ldots 1,\alpha^2,\alpha \qquad C''A''=b''\ldots 1,\alpha^2,1$$
$$AB=c\ldots 0,0,1 \qquad A'B'=c'\ldots 1,\alpha,\alpha^2 \qquad A''B''=c''\ldots 1,1,\alpha^2$$
$$B'''C'''=a'''\ldots 1,\alpha^2,\alpha^2$$
$$C'''A'''=b'''\ldots 1,\alpha,1$$
$$A'''B'''=c'''\ldots 1,1,\alpha.$$

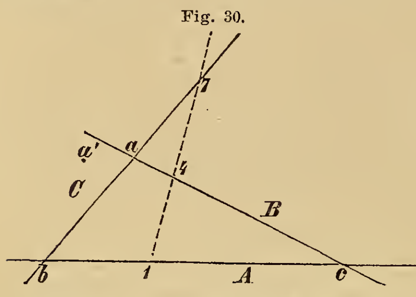
Fig. 30.



Hieraus ersieht man ferner, dass eines der vier Dreiecke vollständig reell ist, nämlich ABC; aber von den Geraden A, B, C enthält jede nur einen reellen Wendepunct, nämlich der Reihe nach 1, 4, 7 (Fig. 30), und dann noch

zwei conjugirt imaginäre. Von einem zweiten Dreiecke, nämlich $A' B' C'$ ist eine Seite A' reell, nämlich die Verbindungslinie der reellen Wendepuncte 1, 4, 7, und ausserdem die gegenüberliegende Ecke a', die beiden anderen Seiten und Ecken dieses Dreiecks sind imaginär. Die beiden noch übrigen Dreiecke endlich sind vollständig imaginär. (*Hesse.* Eigenschaften der Wendepuncte etc. Crelle's Journ. Bd. 38. pag. 257.)

Fig. 30.



355. Durch die neun Wendepuncte einer Curve 3. O. $u = 0$ gehen [339] unendlich viele Curven 3. O. hindurch, unter denen sich auch die Hesse'sche Curve $H(u) = 0$ befindet. Alle diese Curven aber haben die Wendepuncte der Curve u zu ihren eigenen Wendepuncten. (*Hesse.* Ueber die Wendepuncte der Curven 3. O. Crelle's Journ. Bd. 28. pag. 107). Ein derartiger Büschel von Curven 3. O. heisst ein syzygetischer Büschel. (*Cayley.* On curves of the third order. Phil. Trans. vol. 147. pag. 416. *Cremona* art. 140. a)

Beweis 1. Durch einen Wendepunct w gehen vier Gerade, von denen jede zwei neue Wendepuncte enthält [353], und die man daher als Secanten der Curve u betrachten kann. Die harmonische Polare von w schneidet diese Secanten in den zu w zugeordneten harmonischen Puncten. Legt man nun durch w und die acht übrigen Wendepuncte eine andere Curve 3. O., so sind obige 4 Geraden auch für diese Curve Secanten der Art, dass die auf jeder zu w zugeordneten harmonischen Puncte in einer Geraden liegen, also [342] ist w auch ein Wendepunct der neuen Curve 3. O. (*Salmon.* Lettre à monsieur Crelle. Crelle's Journ. Bd. 39. pag. 365. *Cremona* art. 140. a).

Beweis 2. Bringt man nach [354] die Gleichung der Curve u auf die Form

$$A^3 + B^3 + C^3 - 3k\,A\,B\,C = 0,$$

so sind $A\ B\ C$ drei Gerade, welche die Curve in ihren neun Wendepuncten durchschneiden, und zwar gilt dies, welchen Werth auch die Constante k haben möge. Giebt man aber

dieser Constanten alle möglichen Werthe, so erhält man alle möglichen Curven 3. O., welche durch die Durchschnitte einer derselben mit den drei Geraden A, B, C hindurchgehen (z. B. durch die Schnitte der beiden Curven $A^3 + B^3 + C^3 = 0$, und $A\,B\,C = 0$) also sind diese Puncte die Wendepuncte für alle Curven dieses Büschels, der demnach ein syzygetischer ist.

356. Alle Curven eines syzygetischen Büschels haben die harmonische Polare jedes Wendepuncts gemeinschaftlich. — Aus [355]. Bew. 1.

357. Ist $u = 0$ eine Curve 3. O., $H(u) = 0$ ihre Hesse'sche Curve, so ist identisch

$$H\,(H(u) + \lambda u) \equiv \alpha\, u + \beta\, H(u),$$

wo λ, α, β Constanten bedeuten. (*Hesse.* Zur Theorie der Elimination. Crelle's Journ. Bd. 28. pag. 88.)

Beweis. $H(u) + \lambda\, u = 0$ stellt eine Curve dar, welche durch die Schnittpuncte der Curven u und $H(u)$, d. h. durch die Wendepuncte von u (und [355] auch von $H(u)$) geht. Die Wendepuncte dieser neuen Curve liegen auf ihrer Hesse'schen Curve d. h. auf $H\,(H(u) + \lambda\, u) = 0$, sie sind aber [355] identisch mit den Wendepuncten der Curve u, daher geht die Curve $H\,(H(u) + \lambda\, u) = 0$ auch durch die Schnitte von $u = 0$ und $H(u) = 0$, und folglich muss ihre Gleichung auch die Form $\alpha\, u + \beta\, H(u) = 0$ haben. (*Hart. Salmon.* Lettre à l'éditeur. Crelle's Journ. Bd. 39. pag. 366. *Serret.* Alg. sup. II. pag. 589.)

358. Legt man durch einen Wendepunct w drei Secanten, welche die Curve 3. O. in $a\,b$, $a'\,b'$, $a''\,b''$ schneiden, so haben alle Curven 3. O., welche durch die sieben Puncte w, $a\,b$, $a'\,b'$, $a''\,b''$ hindurchgehen, den Wendepunct als solchen und die harmonische Polare desselben gemeinschaftlich.

Beweis. Sind h, h', h'' die Puncte, welche mit w die Punctepaare $a\,b$, $a'\,b'$, $a''\,b''$ harmonisch trennen, so liegen h, h', h'' auf der harmonischen Polare von w [341]. Legt man nun durch die obigen sieben Puncte irgend eine andere Curve 3. O., so sind die Geraden $w\,a\,b$, $w\,a'\,b'$, $w\,a''\,b''$ auch für diese Secanten, daher bleiben die Puncte h, h', h'' ungeändert, und da diese in einer Geraden liegen, so ist w auch für die neue Curve ein Wendepunct [342], und $h\,h'\,h''$ dessen harmonische Polare in Bezug auf die neue Curve. (*Salmon.* H. pl. Curves.

pag. 141 und Crelle's Journ. Bd. 39. pag. 365. *Cremona.* Cve piane art. 140.)

359. Legt man durch irgend sieben Wendepuncte einer Curve 3. O. irgend eine neue Curve 3. O., so ist einer der sieben Wendepuncte und zwar derjenige, welcher mit den beiden fehlenden Wendepuncten in gerader Linie liegt, auch für die neue Curve ein Wendepunct und hat in Beziehung auf beide Curven die harmonische Polare gemeinschaftlich.

Beweis. Da durch jeden Wendepunct vier Gerade gehen, welche alle übrigen Wendepuncte enthalten [353], so lassen sich irgend sieben Wendepuncte stets so anordnen, dass durch drei Paare von ihnen drei Gerade gehen, die in dem siebenten zusammenlaufen, und dieser liegt dann auch mit den beiden fehlenden Wendepuncten in gerader Linie. Jene drei Geraden bilden dann drei durch einen Wendepunct gehende Secanten, und daher gilt [358]. (*Salmon*, l. c. [355] pag. 366 und H. pl. Cvs. pag. 142.)

§. 3.

360. Die Tangenten (Wendetangenten) in zwei Wendepuncten schneiden sich auf der harmonischen Polare desjenigen Wendepunctes, der mit den beiden ersten in gerader Linie liegt. — Aus [344], wenn die Secante wab durch zwei neue Wendepuncte geht, oder aus [347], wenn sowohl $aa'a''$, als auch $bb'b''$ in einen Wendepunct zusammenfallen. (*Cremona.* art. 139. b.)

361. Die harmonischen Polaren dreier in gerader Linie liegender Wendepuncte $w_1\, w_2\, w_3$ schneiden sich in einem und demselben Puncte r. (*Plücker.* Syst. d. anal. Geom. pag. 288.)

Beweis. Seien $T_1\, T_2\, T_3$ (Fig. 31) die den Wendepuncten $w_1\, w_2\, w_3$ angehörigen Wendetangenten, und $I\; II\; III$ ihre Durchschnittspuncte, so folgt zunächst aus [360], dass die harmonischen Polaren von $w_1\, w_2\, w_3$ resp. durch I, II, III hindurchgehen. Seien $I\alpha$, $II\beta$, $III\gamma$ diese harmonischen Polaren. Alsdann sind nach [280] die conischen Polaren der drei Wendepuncte die drei Geradenpaare ($II\; III$, $I\alpha$) ($III\; I$, $II\beta$) ($I\; II$, $III\gamma$). Diese schneiden sich nach [284] in vier Puncten, nämlich [285] in den vier Polen der Geraden $w_1 w_2 w_3$ in Bezug auf die Curve 3. O. Bezeichnet man nun

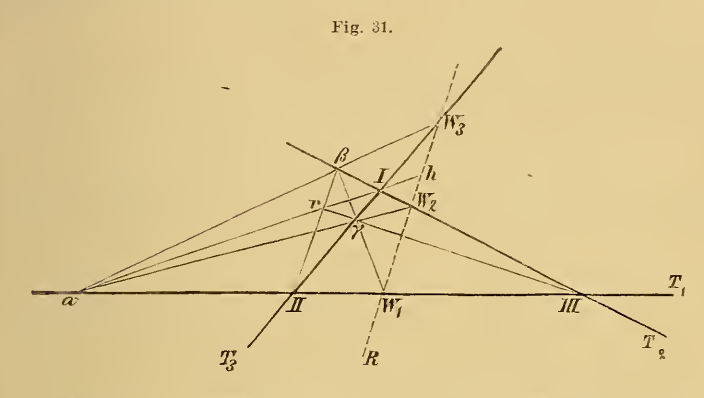
mit r den Durchschnitt der harmonischen Polaren $I\alpha$ und $II\beta$, so schneiden die beiden Geradenpaare $II\,III$, $I\alpha$; $III\,I$, $II\beta$ sich in folgenden vier Puncten

$(II\,III, III\,I) = III, (II\,III, II\beta) = II, (I\alpha, III\,I) = I, (I\alpha, II\beta) = r,$

also muss auch das dritte Geradenpaar $I\,II$, $III\gamma$ durch diese vier Puncte gehen; aber $I\,II$ geht durch I und II, mithin geht $III\gamma$ durch r. (*Cremona.* art. 139. d)

362. Hieraus folgt ausserdem: Die vier Pole einer Geraden, welche drei Wendepuncte $w_1\,w_2\,w_3$ verbindet, sind die drei Durchschnitte der zugehörigen Wendetangenten und der Punct r, in dem sich die harmonischen Polaren von w_1, w_2, w_3 schneiden. (*Plücker.* Syst. d. anal. Geom. pag. 288. *Cremona* art. 139. d.)

Fig. 31.

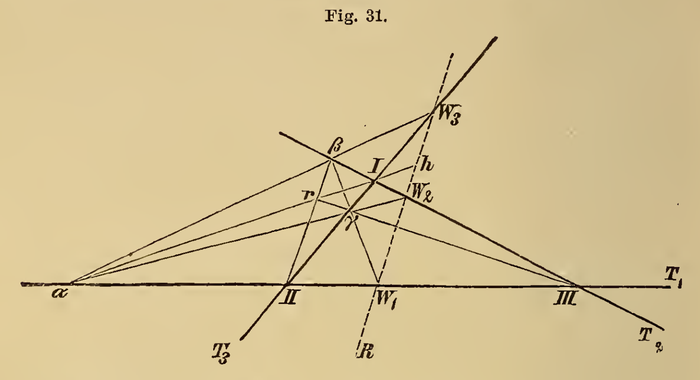


363. Auf der Wendetangente T_1 eines Wendepuncts w_1 sind die Durchschnitte III und II der Wendetangenten T_2 und T_3 zweier mit w_1 auf einer Geraden liegenden Wendepuncte w_2 und w_3 einander harmonisch zugeordnet in Bezug auf den Wendepunct w_1 und den Durchschnitt α der harmonischen Polare $I\alpha$ von w_1 (Fig. 31.)

Beweis. Betrachtet man die Gerade $w_1\,w_2\,w_3$ als eine durch w_1 gezogene Transversale, welche die Curve in w_2 und w_3 trifft, so ist der Durchschnitt h der Geraden $w_1 w_2 w_3$ mit der harmonischen Polaren $I\alpha$ von w_1 nach [341] harmonisch zugeordnet zu w_1 in Bezug auf w_2, w_3. Mithin sind $I\,(h\,w_1\,w_2\,w_3)$ oder, was dasselbe ist, $I\,(\alpha\,w_1\,III\,II)$ vier harmonische Strahlen, und daher $\alpha\,w_1\,II\,III$ vier harmonische Puncte. (*Cremona.* art. 139. c)

364. Da nun hienach die Puncte $\alpha\ \beta\ \gamma$ (Fig. 31) den Wendepuncten $w_1\ w_2\ w_3$ harmonisch zugeordnet sind in Bezug auf die Ecken des Dreiecks $I\ II\ III$, so folgt aus [81] auf's Neue, dass die drei harmonischen Polaren $I\alpha$, $II\beta$, $III\gamma$ sich in einem Puncte schneiden. Ausserdem aber folgt aus [290], dass eine Gerade, welche drei Wendepuncte $w_1\ w_2\ w_3$ verbindet, die gerade Polare des Punctes r ist, in welchem die harmonischen Polaren dieser Wendepuncte sich schneiden, in Bezug auf das aus den zugehörigen Wendetangenten gebildete Dreieck $I\ II\ III$. (*Plücker*. Syst. d. anal. Geom. pag. 288.)

Fig. 31.



365. (Fig. 31.) Eine Gerade R, auf welcher drei Wendepuncte $w_1\ w_2\ w_3$ liegen, ist eine Seite eines der vier Dreiecke, auf deren Seiten nach [354] alle Wendepuncte vertheilt sind. Dann ist der Punct r, in dem sich die harmonischen Polaren der drei auf R liegenden Wendepuncte nach [361] schneiden, die der Seite R gegenüberliegenden Ecke desselben Dreiecks.

B e w e i s. Die conische Polare irgend eines Punctes in Bezug auf das Dreieck, welchem R als Seite angehört, geht durch die Ecken dieses Dreiecks [296]; liegt aber der Punct auf der Seite R, so besteht seine conische Polare aus R und einer zweiten durch die gegenüberliegende Ecke gehenden Geraden, und ist der Punct ein Wendepunct w, so ist diese zweite Gerade die harmonische Polare von w [280, 356]. Diese geht also durch die gegenüberliegende Ecke. Da dasselbe bei allen drei auf R liegenden Wendepuncten $w_1\ w_2\ w_3$ stattfindet, so treffen sich deren drei harmonische Polaren in dieser Ecke, die somit in den Punct r fällt.

366. Da die neun Wendepuncte auf zwölf verschiedene Arten zu je drei, die auf einer Geraden liegen, combinirt werden können, so schneiden sich ihre neun harmonischen Polaren zu je drei in zwölf Puncten [361], und diese sind die zwölf Ecken der vier Dreiecke, welche von jenen Geraden gebildet werden [365]. Da durch jeden Wendepunct vier dieser Geraden gehen [353], so liegen auf jeder harmonischen Polare vier jener Eckpuncte. Von den neun harmonischen Polaren sind (den Wendepuncten entsprechend) drei reell und sechs imaginär; und von jenen zwölf Puncten sind (den Geraden entsprechend) vier reell und acht imaginär [354]. (*Hesse.* Eigenschaften der Wendepuncte etc. Crelle's Journ. Bd. 38. pag. 259. *Cremona* art. 142.)

367. Für jeden Punct m, der auf einer Geraden R liegt, welche drei Wendepuncte verbindet, ist die conische Polare in Bezug auf die Curve dieselbe, wie in Bezug auf die zugehörigen drei Wendetangenten.

Beweis. Dieser Satz ist nur ein specieller Fall von [301]. Denn da auf einer Wendetangente im Wendepuncte drei Curvenpuncte vereinigt sind, so bilden die drei Wendetangenten eine Curve 3. O., deren neun Durchschnitte mit der gegebenen Curve auf drei mit R zusammenfallenden und daher auch durch m gehenden Geraden liegen.

368. Aufgabe. Wenn von einer Curve 3. O. drei in einer Geraden R liegende Wendepuncte nebst den Wendetangenten in den letzteren, und ausserdem ein Curvenpunct p gegeben sind, so soll man in diesem die Tangente construiren.

Auflösung. Man construire nach [291] die gerade Polare des Punctes p in Bezug auf das von den Wendetangenten gebildete Dreieck. Schneidet diese Polare die Gerade R in m, so ist pm die verlangte Tangente. (*Plücker.* System der anal. Geom. pag. 289.)

Beweis. Da die gerade Polare von p in Bezug auf die drei Wendetangenten durch m geht, so geht die conische Polare von m in Bezug auf dasselbe Dreieck durch p [273]. Aber diese conische Polare ist nach [367] zugleich die conische Polare von m in Bezug auf die Curve, also berührt mp die Curve in p. [270].

369. Die Berührungspuncte der sechs Tangenten aus einem Puncte *m* der harmonischen Polare *W* eines Wendepunctes *w* liegen paarweise auf drei Geraden, die durch den Wendepunct *w* gehen.

Beweis. Sei *ma* eine der Tangenten mit dem Berührungspuncte *a*. Schneidet man die Curve mit *wa* in *b*, so geht die Tangente in *b* durch *m* [344], daher ist *mb* eine zweite Tangente. Ist nun *ma'* eine dritte Tangente, so kann *a'* mit *wab* nicht in einer Geraden liegen, daher giebt es jetzt noch eine Tangente *mb'*, bei der *b'* mit *a'w* in gerader Linie liegt, und ebenso giebt es noch ein drittes Paar.

370. Die sechs Tangenten aus einem Puncte *m* der harmonischen Polare *W* eines Wendepunctes *w* bilden eine Involution, und zwar sind je zwei Tangenten, deren Berührungspuncte mit *w* in einer Geraden liegen, conjugirte Strahlen. Die Doppelstrahlen der Involution werden von der harmonischen Polare *W* und der Geraden *mw* gebildet.

Beweis. Sind *a*, *b* die Berührungspuncte solcher zwei Tangenten, dass *wab* in einer Geraden liegen, und schneidet diese Gerade die harmonische Polare *W* in *h*, so sind *wh ab* vier harmonische Puncte [341], und daher *m* (*wh ab*) vier harmonische Strahlen. Setzt man an Stelle des Tangentenpaares *m* (*ab*) ein anderes in derselben Art zusammengehöriges Paar, so gilt dasselbe, und dabei bleiben die Strahlen *mw* und *mh*, d. i. *W* ungeändert. Da die sechs Tangenten also drei Strahlenpaare bilden, welche einander in Bezug auf dasselbe Strahlenpaar *mw* und *W* harmonisch zugeordnet sind, so bilden sie eine Involution [67] [45]. (*Cremona.* Zus. in *Curtze's* Uebersetzung. art. 139. a. bis.)

371. Nimmt man auf den harmonischen Polaren W_1 W_2 W_3 dreier in gerader Linie liegender Wendepuncte w_1, w_2, w_3 je einen Punct m_1, m_2, m_3 beliebig an und zieht aus jedem ein solches Tangentenpaar an die Curve, dass die Berührungspuncte mit dem betreffenden Wendepuncte in gerader Linie liegen [369], so befinden sich diese sechs Berührungspuncte auf einem Kegelschnitt. — Aus [225], denn die sechs Berührungspuncte liegen paarweise auf drei Geraden, welche durch die drei in gerader Linie liegenden Curvenpuncte w_1 w_2 w_3 gehen.

372. Liegt ein Wendepunct *w* im Unendlichen, so ist seine harmonische Polare ein Durchmesser der Curve, d. h. sie halbirt alle Sehnen, welche parallel sind zu der Geraden, die *w* mit zwei anderen Wendepuncten verbindet.

Beweis. Schneidet eine durch *w* gezogene Gerade die Curve in *a*, *b* und die harmonische Polare in *h*, so sind [341] *w h a b* vier harmonische Puncte. Rückt aber *w* ins Unendliche, so fällt *h* in die Mitte von *a b*; und sämmtliche Sehnen *a b* werden parallel mit der Geraden, die *w* mit zwei andern Wendepuncten verbindet. (*Salmon.* pag. 141.)

373. Liegt die harmonische Polare eines Wendepunctes *w* im Unendlichen, so ist der letztere ein Mittelpunct der Curve, d. h. alle durch ihn gehenden Sehnen werden in ihm halbirt. — Denn wie im vorigen Art. sind *w h a b* vier harmonische Puncte. Hier rückt *h* ins Unendliche, also fällt *w* in die Mitte von *a b*. (*Salmon.* pag. 141.)

Siebenter Abschnitt.

Tangenten aus Curvenpuncten. Correspondirende Puncte und Punctepaare. Punctquadrupel.

§. 1.

374. Liegen drei Berührungspuncte *a*, *b*, *c* der aus einem Puncte *m* der Curve an diese gehenden Tangenten in einer Geraden, so ist *m* ein Wendepunct, und die Gerade *a b c* die harmonische Polare desselben. [341] — Denn die zu *a*, *b*, *c* gehörigen Tangentialpuncte liegen [230] ebenfalls in einer Geraden, da sie aber hier in einen Curvenpunct zusammenfallen, so ist dieser ein Wendepunct.

375. Hieraus folgt: Sind *a*, *b*, *c*, *d* die Berührungspuncte der vier Tangenten, welche aus einem Curvenpuncte *m*, der nicht ein Wendepunct ist, an die Curve gelegt werden können, so liegen von ihnen keine drei in einer Geraden.

376. Zieht man aus einem Puncte *m* einer Curve 3. O. die vier ausser der Tangente in *m* möglichen Tangenten an

die Curve, so bleibt das Doppelverhältniss derselben constant, wenn m auf der Curve fortrückt.

Beweis 1. Sind a, b, c, d die vier Berührungspuncte, so geht die conische Polare von m durch diese Puncte hinhindurch [270] und berührt die Curve in m [269]. Bezeichnet man also mit m' einen unendlich nahe bei m liegenden Curvenpunct, so liegt dieser auch auf der conischen Polare von m. Zieht man nun aber aus m' aufs Neue die vier Tangenten an die Curve, so sind die Durchschnittspuncte derselben mit den frühern vier Tangenten die Puncte a, b, c, d, weil [187] zwei unendlich nahe Tangenten sich auf der Curve schneiden. Demnach liegen diese Durchschnitte mit mm' auf dem nämlichen Kegelschnitt, und daher [86] ist das Doppelverhältniss der Strahlen $m(abcd)$ dasselbe wie das der Strahlen $m'(abcd)$. Dieses bleibt also ungeändert, wenn m auf der Curve fortrückt. (*Salmon.* Theorèmes sur les courbes du 3. degré. Crelle's Journ. Bd. 42. pag. 274. H. pl. Cvs. pag. 171. *Cremona*, art. 131.)

Beweis 2. S. [395].

377. Zieht man aus zwei Puncten m und m' einer Curve 3. O. die Tangenten $m(a\ b\ c\ d)$ und $m'(a'\,b'\,c'\,d')$ an die Curve, so liegen die sechszehn Schnittpuncte dieser zwei Mal vier Geraden auf vier Kegelschnitten, welche alle durch m und m' hindurchgehen. (*Salmon.* Theorèmes etc. Crelle's Journ. Bd. 42. pag. 275.)

Beweis. Sind $m'a', m'b', m'c', m'd'$ die Lagen, welche ma, mb, mc, md resp. annehmen, wenn m nach m' gerückt ist, so haben diese beiden Strahlenbüschel gleiches Doppelverhältniss [376]. Sind $\varkappa, \lambda, \mu, \nu$ die der Reihe nach genommenen Durchschnitte je zweier Strahlen $ma, m'a'$, etc., so liegen $m\,m'\,\varkappa\,\lambda\,\mu\,\nu$ auf einem Kegelschnitt [85]. Combinirt man die Strahlenpaare in anderer Weise, so liegen die Schnittpuncte der vier Paare nur dann auf einem Kegelschnitt, wenn das Doppelverhältniss des zweiten Büschels dem des ersten gleich ist, weil die sich schneidenden Strahlen nur dann als einander projectivisch entsprechend betrachtet werden können. Um also Kegelschnitte zu erhalten, darf man nur solche Combinationen nehmen, welche Strahlenbüschel mit gleichem Doppelverhältniss geben. Nun sind nach [24] nur folgende Doppelverhältnisse dem ersten unter ihnen gleich

$$(a'b'c'd'),\quad (b'a'd'c'),\quad (c'd'a'b'),\quad (d'c'b'a').$$

Combinirt man jeden von diesen Büscheln mit *a b c d* und bezeichnet die Durchschnittspuncte wie nebenstehend

$$\begin{array}{llll}
\underline{a,\ b,\ c,\ d,} & & \\
a',\ b',\ c',\ d', & \ldots & \varkappa,\ \lambda,\ \mu,\ \nu \\
b',\ a',\ d',\ c', & \ldots & \varkappa',\ \lambda',\ \mu',\ \nu' \\
c',\ d',\ a',\ b', & \ldots & \varkappa'',\ \lambda'',\ \mu''\ \nu'' \\
d',\ c',\ b',\ a', & \ldots & \varkappa''',\ \lambda''',\ \mu''',\ \nu''',
\end{array}$$

so erhält man die Durchschnitte jeder Tangente des einen Büschels mit jeder des anderen Büschels, also alle sechszehn Schnittpuncte. Diese liegen also auf vier Kegelschnitten, welche alle durch m und m' hindurch gehen, nämlich

$$m m' \varkappa \lambda \mu \nu, \quad m m' \varkappa' \lambda' \mu' \nu', \quad m m' \varkappa'' \lambda'' \mu'' \nu'', \quad m m' \varkappa''' \lambda''' \mu''' \nu'''$$

(*Salmon.* pag. 151. *Cremona.* art. 131. a. 149. e.)

§. 2.

378. Zwei Puncte einer Curve 3. O., welche einen gemeinschaftlichen Tangentialpunct haben, sollen correspondirende Puncte der Curve genannt werden. (*Cremona.* art. 133 a.) Da aus einem Puncte der Curve vier Tangenten an die letztere gehen, so hat ein Curvenpunct als Berührungspunct betrachtet, drei mit ihm correspondirende Puncte. Solche vier unter einander correspondirende Puncte, welche einen gemeinschaftlichen Tangentialpunct haben, sollen das dem letzteren zugehörige Punctquadrupel genannt werden. (*Em. Weyr.* Zur Erzeugung der Curven 3. O. Monatsber. der Wiener Acad. Bd. 58. Oct. 1868.)

379. Liegen die sechs Ecken eines vollständigen Vierseits auf einer Curve 3. O., so sind die gegenüberliegenden Ecken correspondirende Puncte und die den drei Eckenpaaren zugehörigen Tangentialpuncte liegen in gerader Linie.

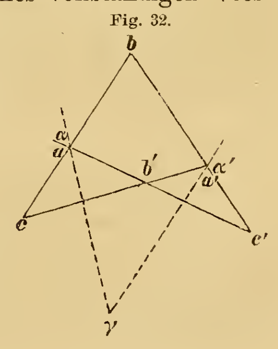
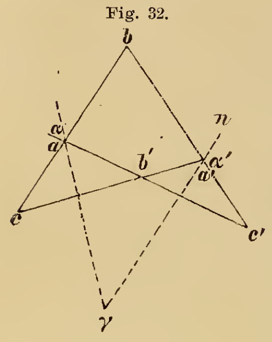


Fig. 32.

Beweis 1. Seien (Fig. 32.) $a a'$, $b b'$, $c c'$ die gegenüberliegenden Eckenpaare des Vierseits. Betrachtet man die in einem derselben z. B. a und a', gezogenen Tangenten als gerade Linien

welche je zwei unendlich nahe Puncte $a\alpha$ und $a'\alpha'$ verbinden, so kann man das Viereck $aa'bb'$ als ein Sechseck $a\alpha b\, a'\alpha' b'$ betrachten, in welchem die sechs Ecken und die Durchschnitte zweier Paare gegenüberliegenden Seiten $(\alpha b, \alpha' b') = c$ und $(ba', b'a) = c'$ auf der Curve liegen. Nach [233] liegt dann auch der Durchschnitt des dritten Paares gegenüberliegender Seiten $(a\alpha, a'\alpha') = \gamma$ auf der Curve. Dieses wird hier aber von den beiden Tangenten in a und a' gebildet. Ebenso kann der Beweis für die beiden anderen Eckenpaare geführt werden. Nun liegen von den sechs Ecken eines vollständigen Vierecks allemal drei, von denen keine zwei demselben Paare angehören, in gerader Linie [82] z. B. $a\; b\; c$, demnach liegen deren zugehörige Tangentialpuncte ebenfalls in einer Geraden [230]. (*Maclaurin* l. c. [230] pag. 237. 242. *Cremona*. art. 45. d.)

Fig. 32.



Beweis 2. Bedeuten $A=0$, $B=0$, $C=0$, $D=0$ die Seiten des Vierseits, indem A, B, C, D lineare homogene Functionen von x_1, x_2, x_3 bezeichnen, so kann die Gleichung einer Curve 3. O. u, welche durch die sechs Ecken des Vierseits geht, in der Form

$$u = \alpha BCD + \beta ACD + \gamma ABD + \delta ABC = 0$$

geschrieben werden, worin $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ Constanten bedeuten. Denn man kann bei dieser Gleichung über 11 Constanten verfügen, und sie wird erfüllt, sobald zwei der vier linearen Functionen verschwinden. Sind nun $y_1\; y_2\; y_3$ die veränderlichen Coordinaten der Tangente in einem Puncte x, und setzt man $\frac{\partial A}{\partial x_i} = A_i$, etc., so erhält man nach [149] als Gleichung der Tangente

$$\left.\begin{aligned} &(\beta CD + \gamma BD + \delta BC)(A_1 y_1 + A_2 y_2 + A_3 y_3) \\ + &(\alpha CD + \gamma AD + \delta AC)(B_1 y_1 + B_2 y_1 + B_3 y_3) \\ + &(\alpha BD + \beta AD + \delta AB)(C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3) \\ + &(\alpha BC + \beta AC + \gamma AB)(D_1 y_1 + D_2 y_2 + D_3 y_3) \end{aligned}\right\} = 0.$$

Bezeichnet man aber mit A_y, B_y etc., was aus A, B, etc.

wird, wenn man darin die y_i statt der x_i substituirt, so ist nach dem *Euler*'schen Satze [6], da A_1 B_1, etc. Constanten sind

$$A_1 y_1 + A_2 y_2 + A_3 y_3 = A_y \qquad B_1 y_2 + B_2 y_2 + B_3 y_3 = B_y$$
$$C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 = C_y \qquad D_1 y_1 + D_2 y_2 + D_3 y_3 = D_y.$$

Demnach wird die Gleichung der Tangente

$$\left.\begin{array}{l}(\beta CD + \gamma BD + \delta BC) A_y + (\alpha CD + \gamma AD + \delta AC) B_y \\ + (\alpha BD + \beta AD + \delta AB) C_y + (\alpha BC + \beta AC + \gamma AB) D_y\end{array}\right\} = 0.$$

Hieraus erhält man nun für die Tangente in der Ecke $A = 0$, $B = 0$ die Gleichung

(1) $$\beta A_y + \alpha B_y = 0$$

und für die in der gegenüberliegenden Ecke $C = 0$, $D = 0$

(2) $$\delta C_y + \gamma D_y = 0.$$

Multiplicirt man die erstere mit $C_y D_y$, die letztere mit $A_y B_y$ und addirt, so erhält man für ihren Durchschnitt

$$\alpha B_y C_y D_y + \beta A_y C_y D_y + \gamma A_y B_y D_y + \delta A_y B_y C_y = 0,$$

und daher liegt dieser auf der Curve u. Ebenso beweist man dasselbe von den Durchschnitten der beiden anderen Tangentenpaare. Multiplicirt man ferner die Gleichung (1) mit $\frac{1}{\alpha\beta}$, und (2) mit $\frac{1}{\gamma\delta}$, so giebt die Summe

$$\frac{A_y}{\alpha} + \frac{B_y}{\beta} + \frac{C_y}{\gamma} + \frac{D_y}{\delta} = 0;$$

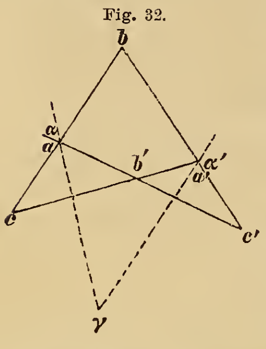
daher liegt der Durchschnitt der beiden Tangenten auf dieser Geraden. Da aber die Gleichung der letzteren sowohl in Bezug auf A_y, B_y, C_y, D_y als auch in Beziehung auf α, β, γ, δ symmetrisch ist, so erhält man dieselbe Gerade auch für die Durchschnitte der beiden anderen Tangentenpaare. (*Cayley*. Mémoire sur les courbes du troisième ordre. Liouville Journ. Tome 9. pag. 285.)

380. Zieht man aus einem beliebigen Curvenpuncte b Strahlen nach zwei correspondirenden Puncten aa' und schneidet damit die Curve in cc', so sind dies zwei neue correspondirende Puncte, und der Durchschnitt $(ac', a'c) = b'$ ist ein zu b correspondirender Punct. (Fig. 32.) (*Maclaurin* l. c. [230] pag. 239.)

Beweis. Denkt man sich die Tangenten in a und a' als

die Verbindungslinien je zweier unendlich naher Puncte $a\alpha$ und $a'\alpha'$ und nennt γ ihren Durchschnittspunct, welcher der Annahme nach auf der Curve liegt, so hat man ein Sechseck $a\alpha c\ a'\alpha' c'$, von welchem nicht bloss die sechs Ecken, sondern auch die Durchschnitte zweier Paare gegenüberliegender Seiten

Fig. 32.



$$(a\alpha,\ a'\alpha') = \gamma,\ (\alpha c,\ \alpha' c') = b$$

auf der Curve liegen. Folglich [233] liegt auch der Durchschnitt des dritten Seitenpaares $(c a',\ c' a) = b'$ auf der Curve. Dann aber bilden $a a' b b' c c'$ die auf der Curve liegenden Ecken eines vollständigen Vierseits, daher [379] sind $b b'$ und $c c'$ correspondirende Puncte.

381. Sei w ein Wendepunct, t der Berührungspunct einer aus w gezogenen Tangente und b irgend ein dritter Punct der Curve. Schneidet man die Curve mit $b w$ in c und mit $b t$ in c', so liegt der Schnittpunct $b' = (c t,\ c' w)$ auf der Curve, und sowohl $b b'$, als auch $c c'$ sind correspondirende Puncte. — Aus [380], da w als ein mit t correspondirender Punct betrachtet werden kann.

382. Zieht man von einem beliebigen Curvenpuncte Strahlen nach den Puncten $a_1\ a_2\ a_3\ a_4$ eines Quadrupels [378], so bilden die Puncte $b_1\ b_2\ b_3\ b_4$, in denen diese Strahlen die Curve treffen, ein neues Quadrupel. (Mittheilung von Herrn Prof. *Küpper.*) — Denn da ein Punct a zu jedem der drei anderen Puncte a correspondirend ist, so ist auch der zugehörige Punct b zu jedem der drei andern Puncte b correspondirend [380]; mithin haben auch die letzteren vier Puncte einen gemeinschaftlichen Tangentialpunct.

§. 3.

383. Liegen drei Curvenpuncte $\alpha\beta\gamma$ in gerader Linie, und zieht man aus α und β je eine Tangente an die Curve, so geht die Verbindungslinie ihrer Berührungspuncte a, b allemal durch den Berührungspunct c einer von γ ausgehenden Tangente.

Beweis. Ist c zunächst der Schnittpunct der Geraden $a\,b$ mit der Curve, so müssen die Tangentialpuncte von $a\,b\,c$ in gerader Linie liegen [230]; aber die Tangentialpuncte von a, b sind α, β, daher muss γ der Tangentialpunct von c sein, d. h. c muss in den Berührungspunct einer von γ ausgehenden Tangente fallen. (*Maclaurin* l. c. [230] pag. 225. *Salmon* pag. 134.)

Bemerkung. In [226] war bewiesen, dass wenn man aus drei in gerader Linie liegenden Curvenpuncten $\alpha\,\beta\,\gamma$ Tangenten an die Curve zieht, die drei Berührungspuncte die Eigenschaft haben, dass die Curve in ihnen von einem Kegelschnitte berührt wird, und dabei bemerkt, dass der Letztere in zwei zusammenfallende Gerade degeneriren kann. Man hat jetzt vollständiger: Sind a und b die Berührungspuncte je einer aus α und β an die Curve gehenden Tangente, und $c_1\,c_2\,c_3\,c_4$ die Berührungspuncte der vier von γ ausgehenden Tangenten, so liegt einer der Puncte c mit $a\,b$ in gerader Linie, und die drei anderen bilden mit a, b die Berührungspuncte je eines Kegelschnitts. Vgl. [542].

384. Zieht man aus drei in gerader Linie liegenden Curvenpuncten α, β, γ drei solche Tangenten an die Curve, dass die Berührungspuncte nicht in gerader Linie liegen, so schneiden sich die Geraden, welche die Ecken dieses Tangentendreiecks mit den gegenüberliegenden Berührungspuncten verbinden, in einem Puncte.

Beweis. Liegen die Berührungspuncte nicht in gerader Linie, so sind sie nach [383, Bem.] zugleich die Berührungspuncte eines Kegelschnitts, welcher also auch die Seiten des Tangentendreiecks in jenen Berührungspuncten berührt. Mithin folgt die Behauptung aus [104]. (*Cremona* art. 149 a.)

Zusatz. Lässt man die Puncte α, β, γ ins Unendliche rücken, so folgt: Wenn man ein Dreieck beschreibt, dessen Seiten den Asymptoten einer Curve 3. O. parallel sind und die Curve berühren, so schneiden sich die drei Geraden, welche die Berührungspuncte mit den gegenüberliegenden Ecken des Dreiecks verbinden, in einem und demselben Puncte. (*Plücker.* Syst. d. anal. Geom. pag. 46.)

385. Sind $\alpha\,\beta\,\gamma$ drei in gerader Linie liegende Curvenpuncte, und zieht man aus jedem die vier Tangenten an die

Curve mit den Berührungspuncten $a_1\,a_2\,a_3\,a_4$; $b_1\,b_2\,b_3\,b_4$; $c_1\,c_2\,c_3\,c_4$, so liegen diese 12 Puncte zu je dreien auf 16 Geraden, von denen durch jeden Punct vier gehen. Die 12 Berührungspuncte lassen sich in folgender Art auf die 16 Geraden vertheilen:

$$
1)\begin{array}{l} a_1\,b_1\,c_1 \\ a_1\,b_2\,c_2 \\ a_1\,b_3\,c_3 \\ a_1\,b_4\,c_4 \end{array}
\quad
2)\begin{array}{l} a_2\,b_1\,c_2 \\ a_2\,b_2\,c_1 \\ a_2\,b_3\,c_4 \\ a_2\,b_4\,c_3 \end{array}
\quad
3)\begin{array}{l} a_3\,b_1\,c_3 \\ a_3\,b_2\,c_4 \\ a_3\,b_3\,c_1 \\ a_3\,b_4\,c_2 \end{array}
\quad
4)\begin{array}{l} a_4\,b_1\,c_4 \\ a_4\,b_2\,c_3 \\ a_4\,b_3\,c_2 \\ a_4\,b_4\,c_1 \end{array}
$$

(*Hesse*. Ueber Curven 3. O. etc. Crelle's Journ. Bd. 36. pag. 153. Für die Berührungspuncte der mit den Asymptoten parallelen Tangenten findet sich der Satz in *Plücker's* System. der anal. Geom. pag. 272.)

Beweis. Durch jeden der 12 Berührungspuncte gehen vier Gerade, welche noch zwei andere dieser Puncte enthalten [383]. Man erhält dadurch 48 Gerade; jede derselben enthält aber drei Puncte, wird also drei Mal gezählt, daher sind nur 16 dieser Geraden von einander verschieden. Man kann nun die Gruppe 1) willkürlich annehmen, indem man die auf den Geraden $a_1 b_1$, $a_1 b_2$, $a_1 b_3$, $a_1 b_4$ liegenden und zu γ gehörenden Berührungspuncte der Reihe nach mit $c_1\,c_2\,c_3\,c_4$ bezeichnet. Alsdann können die Puncte $a_2\,a_3\,a_4$ noch beliebig vertheilt werden. Nun sind aber $b_1\,b_2$ zwei correspondirende Puncte, und die durch dieselben und den Punct a_1 gehenden Geraden schneiden die Curve in $c_1\,c_2$, folglich [380] schneiden sich $b_1\,c_2$, $b_2\,c_1$ in einem mit a_1 correspondirenden Puncte. Dieser werde mit a_2 bezeichnet. Combinirt man ebenso $a_1\,b_1\,c_1$ mit $a_1\,b_3\,c_3$, so ist der Schnitt von $b_1\,c_3$, $b_3\,c_1$ ein mit a_1 correspondirender Punct, welcher von a_1 und a_2 verschieden sein muss, weil sonst vier Puncte auf einer Geraden liegen würden, und der daher mit a_3 bezeichnet werden kann. Endlich werde der aus der Combination von $a_1\,b_1\,c_1$ mit $a_1\,b_4\,c_4$ hervorgehende Schnitt von $b_1\,c_4$, $b_4\,c_1$ mit a_4 bezeichnet. Alsdann hat jeder Berührungspunct seine Bezeichnung gefunden, und es sind dadurch zugleich aus jeder der Gruppen 2) 3) 4) schon zwei Gerade bestimmt, nämlich

$$
2)\begin{array}{l} a_2\,b_1\,c_2 \\ a_2\,b_2\,c_1 \\ a_2\,b_3 \\ a_2\,b_4 \end{array}
\quad
3)\begin{array}{l} a_3\,b_1\,c_3 \\ a_3\,b_2 \\ a_3\,b_3\,c_1 \\ a_3\,b_4 \end{array}
\quad
4)\begin{array}{l} a_4\,b_1\,c_4 \\ a_4\,b_2 \\ a_4\,b_3 \\ a_4\,b_4\,c_1. \end{array}
$$

Bemerkt man nun in Betreff der Ausfüllung der noch übrig gebliebenen Lücken, dass man dabei in jeder Gruppe nur über zwei solche Puncte c verfügen kann, welche dieselben Indices tragen, wie die in den Lücken vorkommenden Puncte b, so hat man nur die Alternative, dem c entweder denselben Index zu geben, welchen b trägt, oder den andern. Allein zwei Puncte b, c, welche denselben Index tragen, gehören wegen der Gruppe 1) allemal zu a_1, man muss also dem c jedesmal den anderen Index geben, sodass die Lücken folgendermassen auszufüllen sind:

$$2) \begin{matrix} a_2\, b_3\, c_4 \\ a_2\, b_4\, c_3 \end{matrix} \qquad 3) \begin{matrix} a_3\, b_2\, c_4 \\ a_3\, b_4\, c_2 \end{matrix} \qquad 4) \begin{matrix} a_4\, b_2\, c_3 \\ a_4\, b_3\, c_2 \end{matrix}$$

Vgl. hierzu [492].

Bemerkung. Die Vertheilung der Indices auf je drei in grader Linie liegende Puncte lässt sich in folgende Regeln fassen:

1) Sind die Indices zweier Puncte einander gleich, so trägt der dritte den Index 1.
2) Sind die Indices zweier Puncte von einander verschieden, und einer von ihnen 1, so sind die beiden anderen einander gleich.
3) Sind die Indices zweier Puncte von einander verschieden und keiner von beiden 1, so erhält der dritte Punct den dritten von 1 verschiedenen Index.

Bezeichnet man demgemäss die Indices 2, 3, 4 in beliebiger Anordnung mit h, i, k, so sind alle Geraden von einer der folgenden fünf Formen:

$$a_1\, b_1\, c_1, \quad a_1\, b_h\, c_h, \quad a_h\, b_1\, c_h, \quad a_h\, b_h\, c_1, \quad a_h\, b_i\, c_k.$$

Die vier durch denselben Punct, z. B. a_k gehenden Geraden sind daher folgende:

$$a_k\, b_1\, c_k, \quad a_k\, b_h\, c_i, \quad a_k\, b_i\, c_h, \quad a_k\, b_k\, c_1.$$

Ausserdem ist für späteres nützlich zu bemerken, dass immer gleichzeitig folgende Geradenpaare existiren:

$$\begin{matrix} a_1\, b_1\, c_1 \\ a_1\, b_h\, c_h \end{matrix} \quad \text{und} \quad \begin{matrix} a_h\, b_1\, c_h \\ a_h\, b_h\, c_1 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} a_1\, b_i\, c_i \\ a_1\, b_h\, c_h \end{matrix} \quad \text{und} \quad \begin{matrix} a_k\, b_i\, c_h \\ a_k\, b_h\, c_i \end{matrix}$$

386. Aus diesen 16 Geraden lassen sich acht Gruppen zu je vier bilden, so dass jede Gruppe alle 12 Berührungspuncte enthält. Diese acht Gruppen ergeben sich aus [385] als folgende:

$a_1\, b_1\, c_1$	$a_1\, b_1\, c_1$	$a_1\, b_2\, c_2$	$a_1\, b_2\, c_2$
$a_2\, b_3\, c_4$	$a_2\, b_4\, c_3$	$a_2\, b_3\, c_4$	$a_2\, b_4\, c_3$
$a_3\, b_4\, c_2$	$a_3\, b_2\, c_4$	$a_3\, b_1\, c_3$	$a_3\, b_3\, c_1$
$a_4\, b_2\, c_3$	$a_4\, b_3\, c_2$	$a_4\, b_4\, c_1$	$a_4\, b_1\, c_4$
$a_1\, b_3\, c_3$	$a_1\, b_3\, c_3$	$a_1\, b_4\, c_4$	$a_1\, b_4\, c_4$
$a_2\, b_1\, c_2$	$a_2\, b_2\, c_1$	$a_2\, b_1\, c_2$	$a_2\, b_2\, c_1$
$a_3\, b_2\, c_4$	$a_3\, b_4\, c_2$	$a_3\, b_3\, c_1$	$a_3\, b_1\, c_3$
$a_4\, b_4\, c_1$	$a_4\, b_1\, c_4$	$a_4\, b_2\, c_3$	$a_4\, b_3\, c_2$.

(*Hesse.* Ueber Curven 3. O. etc. Crelle's Journ. Bd. 36. pag. 153. *Cremona* art. 149. Zusatz in *Curtze's* Uebersetzung.)

387. Legt man die drei in gerader Linie liegenden Curvenpuncte [385] in drei Wendepuncte, so fällt je ein Berührungspunct a, b, c mit einem Wendepunct w, w', w'' zusammen. Setzt man diese an Stelle von a_1, b_1, c_1, so gehen von den Geraden in [385] folgende durch einen der Wendepuncte:

$$w\, b_2\, c_2 \quad w'\, a_2\, c_2 \quad w''\, a_2\, b_2$$
$$w\, b_3\, c_3 \quad w'\, a_3\, c_3 \quad w''\, a_3\, b_3$$
$$w\, b_4\, c_4 \quad w'\, a_4\, c_4 \quad w''\, a_4\, b_4.$$

(Vgl. 549.)

388. Zieht man aus einem Curvenpuncte α die vier Tangenten an die Curve mit den Berührungspuncten $a_1\, a_2\, a_2\, a_4$, und aus einem derselben z. B. a_1 auf's Neue vier Tangenten mit den Berührungspuncten $b_1\, b_2\, b_3\, b_4$, so sind die drei anderen $a_2\, a_3\, a_4$ die Diagonalpuncte des vollständigen Vierecks $b_1\, b_2\, b_3\, b_4$.

Beweis 1. Lässt man in [385] die Puncte β, γ zusammenfallen, so fallen auch $c_1\, c_2\, c_3\, c_4$ resp. mit $b_1\, b_2\, b_3\, b_4$ zusammen. Ferner ist dann $\alpha\, \beta$ Tangente der Curve, und zwar β Berührungspunct, α Tangentialpunct. Setzt man nun in dem Schema der 16 Geraden in [385] überall b statt c, so verwandelt sich dasselbe mit Weglassung der nun identisch werdenden Geraden in Folgendes:

$$\begin{array}{llll} a_1\, b_1\, b_1 & a_2\, b_1\, b_2 & a_3\, b_1\, b_3 & a_4\, b_1\, b_4 \\ a_1\, b_2\, b_2 & a_2\, b_3\, b_4 & a_3\, b_2\, b_4 & a_4\, b_2\, b_3 \\ a_1\, b_3\, b_3 & & & \\ a_1\, b_4\, b_4. & & & \end{array}$$

Demnach ist a_1 der gemeinschaftliche Tangentialpunct für das Punctquadrupel [378] $b_1 b_2 b_3 b_4$, und die drei anderen Puncte $a_2 a_3 a_4$ sind die Durchschnitte

$$a_2 = (b_1 b_2,\, b_3 b_4),\; a_3 = (b_1 b_3,\, b_2 b_4),\; a_4 = (b_1 b_4,\, b_2 b_3).$$

(*Salmon.* pag. 134. *Cremona.* art. 146. a.)

Beweis 2. S. [409].

389. Ist α ein Wendepunct, a_1 der Berührungspunct einer aus α an die Curve gehenden Tangente, und zieht man aus a_1 die vier Tangenten mit den Berührungspuncten $b_1 b_2 b_3 b_4$, so schneiden sich von den drei Paaren gegenüberliegender Seiten des vollständigen Vierecks $b_1 b_2 b_3 b_4$ zwei auf der harmonischen Polare von α und das dritte in α selbst.

Beweis. Sind $a_1 a_2 a_3 a_4$ wie in [388] die Berührungspuncte der aus α gezogenen Tangenten, so fällt, wenn α ein Wendepunct ist, einer, z. B. a_4 in den Wendepunct, und die drei anderen $a_1 a_2 a_3$ liegen auf der harmonischen Polare von α [341]. Nun sind [388] $a_2 a_3 a_4$ die Schnittpuncte der Seitenpaare $(b_1 b_2, b_3 b_4)$, $(b_1 b_3, b_2 b_4)$, $(b_1 b_4, b_2 b_3)$; daher liegen von diesen die beiden ersten auf der harmonischen Polare von α, und der dritte fällt in den Wendepunct α. (Vgl. auch [369] und [344]).

390. Wenn die Tangentialpuncte $\alpha\, \beta\, \gamma$ dreier Curvenpuncte $a\, b\, c$ in gerader Linie liegen, so liegen auch die Puncte $a' b' c'$, in welchen die Geraden bc, ca, ab die Curve schneiden, in gerader Linie, und da alsdann $a b c a' b' c'$ die auf der Curve liegenden sechs Ecken eines vollständigen Vierseits bilden, so sind nach [379] aa', bb', cc' drei Paare correspondirender Puncte.

Beweis. Liegen abc in gerader Linie, so versteht sich der Satz von selbst. Liegen aber abc nicht in einer Geraden, so können sie, wenn man die Bezeichnung von [385] anwendet, nur in folgenden vier verschiedenen Combinationen

auftreten: (die aus der Vertauschung der Buchstaben $a\ b\ c$ untereinander ausserdem noch hervorgehenden Anordnungen sind dabei als unwesentlich nicht mit berücksichtigt)

$$1)\ a_1\, b_1\, c_h, \quad 2)\ a_1\, b_h\, c_i \quad 3)\ a_h\, b_h\, c_h \quad 4)\ a_h\, b_h\, c_i.$$

Zieht man nun jedesmal die Geraden bc, ca, ab und sucht die dritten Durchschnittspuncte auf, so findet man nach [385]

$$\begin{array}{llll} 1)\ b_1\, c_h\, a_h & 2)\ b_h\, c_i\, a_k, & 3)\ b_h\, c_h\, a_1 & 4)\ b_h\, c_i\, a_k \\ \quad c_h\, a_1\, b_h & \quad c_i\, a_1\, b_i & \quad c_h\, a_h\, b_1 & \quad c_i\, a_h\, b_k \\ \quad a_1\, b_1\, c_1 & \quad a_1\, b_h\, c_h & \quad a_h\, b_h\, c_1 & \quad a_h\, b_h\, c_1. \end{array}$$

Die Puncte $a'b'c'$ sind daher der Reihe nach

$$1)\ a_h\, b_h\, c_1 \quad 2)\ a_k\, b_i\, c_h \quad 3)\ a_1\, b_1\, c_1 \quad 4)\ a_k\, b_k\, c_1,$$

und diese liegen nach [385] jedesmal in einer Geraden. Vgl. [227] und [383, Bem.]

§. 4.

391. Seien $\alpha\ \beta\ \gamma$ drei in gerader Linie liegende Curvenpuncte. Zieht man aus β und γ die Tangenten an die Curve und sucht die Durchschnitte je einer Tangente aus β mit je einer aus γ auf, so giebt es unter diesen Schnittpuncten solche, deren Verbindungslinie durch einen Berührungspunct der aus α an die Curve gelegten Tangenten geht.

Um diese Verbindungslinien zu finden, sei A_1 eine aus α an die Curve gehende Tangente mit dem Berührungspuncte a_1. Durch diesen Punct gehen nach [385] vier Gerade, welche die Berührungspuncte je einer aus β und γ gezogenen Tangente enthalten. Man nehme zwei dieser Geraden z. B. unter Beibehaltung der in [385] gewählten Bezeichnung, $a_1\, b_1\, c_1$ und $a_1\, b_2\, c_2$ und bezeichne die die Berührungspuncte b_1, b_2 und c_1, c_2 tragenden Tangenten aus β und γ resp. mit B_1, B_2 und C_1, C_2. Bezeichnet man ferner die Gleichungen der Geraden $a_1\, b_1\, c_1$, $a_1\, b_2\, c_2$, $\alpha\,\beta\,\gamma$ resp. mit $D_1 = 0$, $D_2 = 0$, $F = 0$ (nach [230] ist F die Begleiterin sowohl von D_1 als auch von D_2), so kann man die Gleichung der Curve nach [245 Bew. 2] ebensowohl in der Form

$$A_1\, B_1\, C_1 - D_1^2\, F = 0,$$

wie auch in der Form

$$A_1\, B_2\, C_2 - D_2^2\, F = 0$$

schreiben. Die linken Theile dieser Gleichungen können sich daher nur durch einen constanten Factor λ^2 unterscheiden. Demnach ist

$$A_1 B_1 C_1 - D_1^2 F \equiv \lambda^2 (A_1 B_2 C_2 - D_2^2 F)$$

oder

$$A_1 (B_1 C_1 - \lambda^2 B_2 C_2) \equiv F (D_1 + \lambda D_2) (D_1 - \lambda D_2).$$

Da nun in dieser Gleichung der rechte Theil aus drei linearen Factoren besteht, so muss dasselbe bei dem linken Theile stattfinden, also muss der Kegelschnitt

$$B_1 C_1 - \lambda^2 B_2 C_2 = 0$$

aus zwei Geraden bestehen. Dieser Kegelschnitt geht durch die vier Puncte

$$(B_1 B_2),\ (C_1 C_2),\ (B_1 C_2),\ (B_2 C_1),$$

von welchen die beiden ersten β, γ sind, und die beiden letzten mit

$$(B_1 C_2) = \varkappa'_{12}\quad (B_2 C_1) = \lambda'_{21}$$

bezeichnet werden mögen. Nun ist $\beta\gamma$ die Gerade F, und diese kommt rechter Hand vor, daher muss sie auch linker Hand vorkommen und eine der beiden den Kegelschnitt zusammensetzenden Geraden bilden, mithin ist die andere $\varkappa'_{12} \lambda'_{21}$. Demnach hat man

$$\varkappa'_{12} \lambda'_{21} \equiv D_1 \pm \lambda D_2$$

und dann

$$A_1 \equiv D_1 \mp \lambda D_2.$$

Die Verbindungslinie $\varkappa'_{12} \lambda'_{21}$, oder $(B_1 C_2, B_2 C_1)$ geht also durch $(D_1 D_2) = a_1$ hindurch, und ausserdem sind D_1, D_2 und $\varkappa'_{12} \lambda'_{21}$, A_1 zwei Paare zugeordneter harmonischer Strahlen. (*Salmon*. pag. 135. *Cremona* art. 149. b.)

392. Diese Betrachtung lehrt nun genauer kennen, welche Tangentenschnittpuncte mit jedem der Berührungspuncte a in gerader Linie liegen. Es lässt sich nämlich daraus folgende Regel ableiten: Man wähle unter den vier nach [385] durch einen der Puncte a gehenden Geraden irgend zwei aus und nehme diejenigen zwei Tangentenpaare aus β und γ, deren Berührungspuncte auf diesen beiden Geraden liegen. Dann geht durch den Punct a die Verbindungslinie derjenigen zwei Tangentenschnittpuncte, die man erhält, wenn man je zwei dieser Tangenten zum Durchschnitt bringt, deren Berührungspuncte n i c h t beide zugleich auf einer der

beiden durch a gehenden Geraden liegen. Wählt man z. B. unter den vier nach [385] durch a_k gehenden Geraden

$$a_k\, b_h\, c_i, \quad a_k\, b_i\, c_h, \quad a_k\, b_1\, c_k, \quad a_k\, b_k\, c_1$$

die beiden: $a_k\, b_i\, c_h$, $a_k\, b_1\, c_k$ aus, so geht durch a_k die Verbindungslinie der Durchschnittspuncte $(B_i\, C_k)$ und $(B_1\, C_h)$; (dabei sind die Tangenten B oder C immer mit demselben Index bezeichnet, welchen der zugehörige Berührungspunct b oder c trägt.) Ausserdem hat [391] ergeben, dass diese Verbindungslinie harmonisch zugeordnet ist zu der Tangente $a_k\, \alpha$ in Beziehung auf die beiden gewählten Geraden $a_k\, b_i\, c_h$, $a_k\, b_1\, c_k$. Dabei bemerke man zugleich, dass die Berührungspuncte der zum Durchschnitt gebrachten Tangenten ebenfalls in zwei Geraden liegen, die sich aber in einem anderen Puncte a schneiden; nämlich nach [385] gehen in unserem Beispiele $b_i\, c_k$ und $b_1\, c_h$ beide durch a_h. Endlich ergiebt sich hieraus, dass wenn man einen der Tangentenschnittpuncte mit einem der Puncte a verbindet, welcher mit den Berührungspuncten der zum Durchschnitt gebrachten Tangenten nicht in gerader Linie liegt, diese Gerade jedesmal durch einen neuen Tangentenschnittpunct geht. Z. B. Bei $B_i\, C_k$ liegen $b_i\, c_k$ in gerader Linie mit a_h; dagegen trifft die Gerade

durch (B_iC_k) u. a_k den Punct $(B_1\, C_h)$ wegen des Geradenp. $a_k\, b_i\, c_h$
$a_k\, b_1\, c_k$
„ (B_iC_k) „ a_i „ „ $(B_k\, C_1)$ „ „ „ $a_i\, b_h\, c_k$
$a_i\, b_i\, c_1$
„ (B_iC_k) „ a_1 „ „ $(B_k C_i)$ „ „ „ $a_1\, b_i\, c_i$
$a_1\, b_k\, c_k$.

393. Da durch jeden der Berührungspuncte a nach [385] vier Geraden gehen, die noch je zwei Berührungspuncte b und c enthalten, und da man diese vier Geraden auf sechs verschiedene Arten zu je zweien combiniren kann, so gehen durch jeden Punct a sechs Verbindungslinien von Tangentenschnittpuncten.

Um das ganze Tableau dieser Verbindungslinien aufzustellen, seien $B_1\, B_2\, B_3\, B_4$ die vier aus β, und $C_1\, C_2\, C_3\, C_4$ die aus γ ausgehenden Tangenten, und die Durchschnitte der letzteren mit den ersteren mögen der in [377] gewählten Bezeichnung entsprechend, wie nachstehend bezeichnet werden:

B_1 B_2 B_3 B_4				
C_1 C_2 C_3 C_4	$\varkappa_{11}$	λ_{22}	μ_{33}	ν_{44}
C_2 C_1 C_4 C_3	$\varkappa'_{12}$	λ'_{21}	μ'_{34}	ν'_{43}
C_3 C_4 C_1 C_2	$\varkappa''_{13}$	λ''_{24}	μ''_{31}	ν''_{42}
C_4 C_3 C_2 C_1	$\varkappa'''_{14}$	λ'''_{23}	μ'''_{32}	ν'''_{41},

wobei der hinzugefügte Doppelindex sogleich die sich durchschneidenden Tangenten erkennen lässt. Man kann hiermit folgende Tabelle entwerfen:

Geradenpaare durch die Berührungspuncte nach [385].	Verbindungslinie der Tangentenschnittpuncte.	Die letztere ist in Beziehung auf die beiden ersten harmonisch zugeordnet zu
$a_1\ b_1\ c_1 \quad a_1\ b_2\ c_2$	$a_1\ \varkappa'_{12}\ \lambda'_{21}$	
$a_1\ b_1\ c_1 \quad a_1\ b_3\ c_3$	$a_1\ \varkappa''_{13}\ \mu''_{31}$	
$a_1\ b_1\ c_1 \quad a_1\ b_4\ c_4$	$a_1\ \varkappa'''_{14}\ \nu'''_{41}$	$a_1\ \alpha$
$a_1\ b_2\ c_2 \quad a_1\ b_3\ c_3$	$a_1\ \lambda'''_{23}\ \mu'''_{32}$	
$a_1\ b_2\ c_2 \quad a_1\ b_4\ c_4$	$a_1\ \lambda''_{24}\ \nu''_{42}$	
$a_1\ b_3\ c_3 \quad a_1\ b_4\ c_4$	$a_1\ \mu'_{34}\ \nu'_{43}$	
$a_2\ b_1\ c_2 \quad a_2\ b_2\ c_1$	$a_2\ \varkappa_{11}\ \lambda_{22}$	
$a_2\ b_1\ c_2 \quad a_2\ b_3\ c_4$	$a_2\ \varkappa'''_{14}\ \mu'''_{32}$	
$a_2\ b_1\ c_2 \quad a_2\ b_4\ c_3$	$a_2\ \varkappa''_{13}\ \nu''_{42}$	$a_2\ \alpha$
$a_2\ b_2\ c_1 \quad a_2\ b_3\ c_4$	$a_2\ \lambda''_{24}\ \mu''_{31}$	
$a_2\ b_2\ c_1 \quad a_2\ b_4\ c_3$	$a_2\ \lambda'''_{23}\ \nu'''_{41}$	
$a_2\ b_3\ c_4 \quad a_2\ b_4\ c_3$	$a_2\ \mu_{33}\ \nu_{44}$	
$a_3\ b_1\ c_3 \quad a_3\ b_2\ c_4$	$a_3\ \varkappa'''_{14}\ \lambda'''_{23}$	
$a_3\ b_1\ c_3 \quad a_3\ b_3\ c_1$	$a_3\ \varkappa_{11}\ \mu_{33}$	
$a_3\ b_1\ c_3 \quad a_3\ b_4\ c_2$	$a_3\ \varkappa'_{12}\ \nu'_{43}$	$a_3\ \alpha$
$a_3\ b_2\ c_4 \quad a_3\ b_3\ c_1$	$a_3\ \lambda'_{21}\ \mu'_{34}$	
$a_3\ b_2\ c_4 \quad a_3\ b_4\ c_2$	$a_2\ \lambda_{22}\ \nu_{44}$	
$a_3\ b_3\ c_1 \quad a_3\ b_4\ c_2$	$a_3\ \mu'''_{32}\ \nu'''_{41}$	
$a_4\ b_1\ c_4 \quad a_4\ b_2\ c_3$	$a_4\ \varkappa''_{13}\ \lambda''_{24}$	
$a_4\ b_1\ c_4 \quad a_4\ b_3\ c_2$	$a_4\ \varkappa'_{12}\ \mu'_{34}$	
$a_4\ b_1\ c_4 \quad a_4\ b_4\ c_1$	$a_4\ \varkappa_{11}\ \nu_{44}$	$a_4\ \alpha$
$a_4\ b_2\ c_3 \quad a_4\ b_3\ c_2$	$a_4\ \lambda_{22}\ \mu_{33}$	
$a_4\ b_2\ c_3 \quad a_4\ b_4\ c_1$	$a_4\ \lambda'_{21}\ \nu'_{43}$	
$a_4\ b_3\ c_2 \quad a_4\ b_4\ c_1$	$a_4\ \mu''_{31}\ \nu''_{42}$	

394. Aus dem Vorigen folgt ferner, was auch die Tabelle bestätigt, dass durch jeden Tangentenschnittpunct drei der in Rede stehenden Verbindungslinien gehen, und zwar gehen diese durch diejenigen drei Puncte a, welche mit den Berührungspuncten der zu dem betrachteten Schnittpunct combinirten Tangenten nicht in gerader Linie liegen, während die Verbindungslinie dieser Berührungspuncte selbst den vierten Punct a enthält. So gehen z. B. durch den Punct $\varkappa_{11}$ d. i. (B_1, C_1) die drei Geraden

$$a_2\, \varkappa_{11}\, \lambda_{22}, \quad a_3\, \varkappa_{11}\, \mu_{33}, \quad a_4\, \varkappa_{11}\, \nu_{44},$$

während die Berührungspuncte der Tangenten B_1, C_1, nämlich b_1, c_1 mit a_1 in gerader Linie liegen. Nimmt man daher die vier Tangentenpaare, deren Berührungspuncte mit dem nämlichen Puncte a in gerader Linie liegen, sodass dabei also alle acht Tangenten zur Verwendung gelangen, so bilden deren Durchschnitte ein vollständiges Viereck, dessen Diagonalpuncte die drei anderen Puncte a sind. Auf diese Art theilen sich die 16 Schnittpuncte der zwei Mal vier Tangenten B und C in vier Gruppen zu je vieren, so dass jede Gruppe eines der erwähnten vollständigen Vierecke bildet. Diese sind

$\varkappa_{11}$	λ_{22}	μ_{33}	ν_{44}	mit den Diagonalpuncten	$a_2\, a_3\, a_4$
$\varkappa'_{12}$	λ'_{21}	μ'_{34}	ν'_{43}	„ „ „	$a_3\, a_4\, a_1$
$\varkappa''_{13}$	λ''_{24}	μ''_{31}	ν''_{42}	„ „ „	$a_4\, a_1\, a_2$
$\varkappa'''_{14}$	λ'''_{23}	μ'''_{32}	ν'''_{41}	„ „ „	$a_1\, a_2\, a_3$

(*Cremona* art. 149. d.)

395. Man kann nun zeigen, dass die Ecken jedes dieser vollständigen Vierecke gerade die Tangentenschnittpuncte sind, welche nach [377] mit den Tangentialpuncten β und γ in einem Kegelschnitte liegen, indem man direct nachweist, dass die von diesen beiden Puncten ausgehenden Tangentenbüschel $B_1\, B_2\, B_3\, B_4$ und $C_1\, C_2\, C_3\, C_4$ projectivisch sind, und damit zugleich einen zweiten Beweis des Satzes [376] liefern.

Zu dem Ende bemerke man folgendes: Zieht man aus einem der Puncte a Strahlen nach den Durchschnitten einer Tangente B mit den vier Tangenten C, so wird jedesmal einer dieser Durchschnitte von zwei Tangenten gebildet, deren Berührungspuncte mit a in gerader Linie liegen, sodass nach

[394] der durch diesen Schnittpunct gehende Strahl keinen neuen Tangentenschnittpunct trifft. Die übrigen drei Strahlen aber treffen neue Tangentenschnittpuncte und zwar solche, die alle auf derjenigen Tangente C liegen, welche B in dem zuerst erwähnten Puncte trifft. Bezeichnet man, um dies zu übersehen, die Indices 2, 3, 4 wieder mit h, i, k, so können die Fälle eintreten, dass entweder der Punct a, oder die Tangente B, oder beide, oder endlich keiner von beiden den Index 1 trägt, wobei in dem letzten Falle noch zu unterscheiden ist, ob die Indices von a und B gleich oder verschieden sind. Bestimmt man nun in jedem Falle nach der in [392] gegebenen Regel mit Rücksicht auf [385] die zusammengehörigen Schnittpuncte, so erhält man folgendes:

1) Ist der Punct a_1, die Tangente B_1, so gehen die Verbindungslinien von a_1 mit $B_1C_1 \quad B_1C_h \quad B_1C_i \quad B_1C_k$
auf's Neue durch — $B_hC_1 \quad B_iC_1 \quad B_kC_1$,
und die neuen Schnittpuncte liegen auf C_1.

2) Ist der Punct a_1, die Tangente B_h, so gehen die Verbindungslinien von a_1 mit $B_hC_1 \quad B_hC_h \quad B_hC_i \quad B_hC_k$
auf's Neue durch B_1C_h — $B_iC_h \quad B_kC_h$,
und die neuen Schnittpuncte liegen auf C_h.

3) Ist der Punct a_h, die Tangente B_1, so gehen die Verbindungslinien von a_h mit $B_1C_1 \quad B_1C_h \quad B_1C_i \quad B_1C_k$
auf's Neue durch B_hC_h — $B_kC_h \quad B_iC_h$,
und die neuen Schnittpuncte liegen auf C_h.

4) Ist der Punct a_h, die Tangente B_h, so gehen die Verbindungslinien von a_h mit $B_hC_1 \quad B_hC_h \quad B_hC_i \quad B_hC_k$
auf's Neue durch — $B_1C_1 \quad B_kC_1 \quad B_iC_1$,
und die neuen Schnittpuncte liegen auf C_1.

5) Ist der Punct a_h, die Tangente B_i, so gehen die Verbindungslinien von a_h mit $B_iC_1 \quad B_iC_h \quad B_iC_i \quad B_iC_k$
auf's Neue durch $B_hC_k \quad B_1C_k \quad B_kC_k$ —.

Es tritt also das Behauptete in allen Fällen ein, das sich nun auch so aussprechen lässt: Die von einem der Puncte a nach den Schnittpuncten einer Tangente B mit den vier Tangenten C gehenden Strahlen treffen eine der Tangenten C in den vier Durchschnittspuncten derselben mit den vier Tangenten B; und zwar gehören der Punct, die erstere Tan-

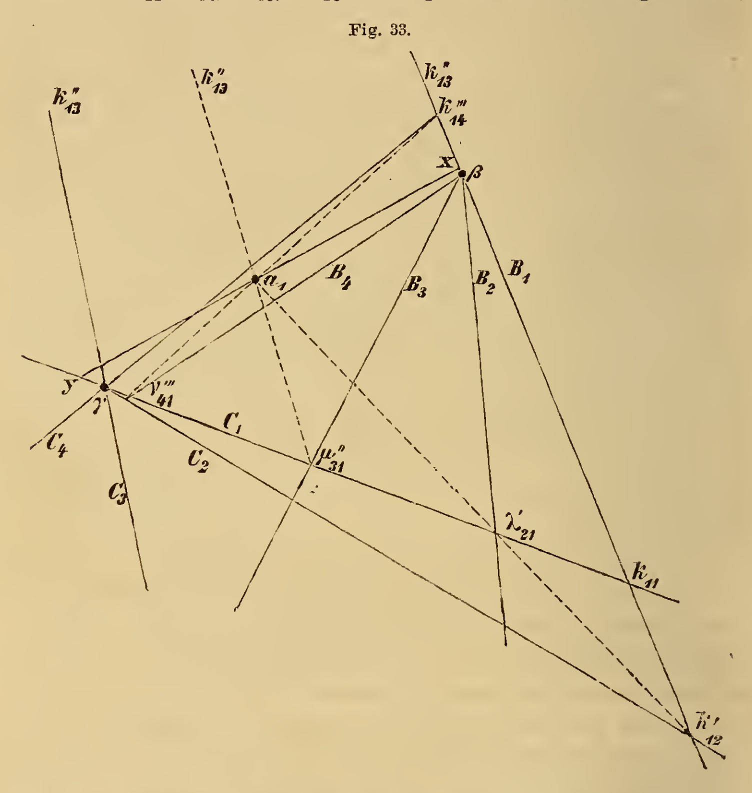
gente B und die letztere C in derselben Art zusammen, wie drei in gerader Linie liegende Berührungspuncte, nämlich

$$a_1\, B_1\, C_1 \quad a_1\, B_h\, C_h \quad a_h\, B_1\, C_h \quad a_h\, B_h\, C_1 \quad a_h\, B_i\, C_k.$$

Wir knüpfen nun die weitere Erörterung an einen bestimmten Fall an, da aus dem oben Gesagten hervorgeht, dass die übrigen Fälle ebenso behandelt werden können.

Betrachten wir die Strahlen aus a_1 nach den Durchschnitten $\varkappa_{11}, \varkappa'_{12}, \varkappa''_{13}, \varkappa'''_{14}$ von B_1 mit den vier Tangenten C,

Fig. 33.



(Fig. 33.), so liegt der Büschel der letzteren mit dem ersteren Strahlenbüschel perspectivisch, daher ist

$$a_1\, (\varkappa_{11}, \varkappa'_{12}, \varkappa''_{13}, \varkappa'''_{14}) \;\overline{\wedge}\; \gamma\, (C_1\, C_2\, C_3\, C_4).$$

Nun schneiden aber die vier Strahlen aus a_1 die Tangente C_1 in den Puncten $\varkappa_{11}, \lambda'_{21}, \mu''_{31}, \nu'''_{41}$, so dass man statt des vorigen auch schreiben kann

$$a_1 (\varkappa_{11}, \lambda'_{21}, \mu''_{31}, \nu'''_{41}) \;\overline{\wedge}\; \gamma (C_1\, C_2\, C_3\, C_4),$$

und da diese neuen Puncte die Schnitte von C_1 mit den vier Tangenten B sind, so ist auch

$$a_1 (\varkappa_{11}, \lambda'_{21}, \mu''_{31}, \nu'''_{41}) \;\overline{\wedge}\; \beta (B_1\, B_2\, B_3\, B_4),$$

mithin

$$\beta (B_1\, B_2\, B_3\, B_4) \;\overline{\wedge}\; \gamma (C_1\, C_2\, C_3\, C_4):$$

und dies ist Satz [376]. Die Schnittpuncte der sich projectivisch entsprechenden Strahlen aber liegen mit β und γ in einem Kegelschnitt und bilden zugleich das vollständige Viereck $\varkappa_{11}\, \lambda_{22}\, \mu_{33}\, \nu_{44}$, welchem der Punct a_1 nicht als Diagonalpunct zugehört. (*Cremona.* art. 149. c.)

396. Verbindet man β und γ durch gerade Linien mit dem Puncte a_1, welcher in dem vollständigen Viereck $\varkappa_{11}\, \lambda_{22}\, \mu_{33}\, \nu_{44}$ nicht als Diagonalpunct auftritt, so sind für den Kegelschnitt, welcher durch diese Puncte und durch β, γ geht, βa_1 und γa_1 die Tangenten in β und γ, d. h. a_1 ist der Pol der Geraden $\beta\gamma$ in Bezug auf diesen Kegelschnitt.

B e w e i s. (Fig. 33.) Nach [395] schneiden die projectivischen Strahlbüschel $\beta (B_1\, B_2\, B_3\, B_4)$ und $\gamma (C_1\, C_2\, C_3\, C_4)$ die Tangenten C_1 und B_1 resp. in den Puncten $\varkappa_{11}\, \lambda'_{21}\, \mu''_{31}\, \nu'''_{41}$ und $\varkappa_{11}\, \varkappa'_{12}\, \varkappa''_{13}\, \varkappa'''_{14}$, und diese liegen paarweise in Strahlen, die von a_1 ausgehen. Man erhält daher auf C_1 und B_1 zwei projectivische und perspectivisch liegende Punctreihen, deren entsprechende Puncte, mit β und γ verbunden, entsprechende Strahlen dieser beiden Strahlenbüschel liefern. Zieht man also durch a_1 eine beliebige Gerade, welche C_1 und B_1 in y und x schneidet, so sind βy und γx entsprechende Strahlen und schneiden sich daher auf dem in Rede stehenden Kegelschnitte. Rückt aber x nach β, so verwandeln sich βy und γx in βa_1 und $\gamma\beta$, und da nun βa_1 der Verbindungslinie $\beta\gamma$ der beiden Mittelpuncte der Strahlenbüschel entspricht, so berührt βa_1 den Kegelschnitt in β. Rückt dagegen y nach γ, so entsprechen sich $\beta\gamma$ und γa_1 und daher berührt auch γa_1 den Kegelschnitt in γ. (*Salmon.* Theorèmes sur les courbes de 3. degré. Crelle's Journ. Bd. 42. *Cremona.* art. 149. e.)

397. Wendet man dieselbe Betrachtung auch auf a_2, a_3, a_4 an, so folgt: Legt man aus zwei Puncten $\beta\gamma$, einer

Curve 3. O. die Tangenten an dieselbe, so liegen die Pole der Geraden $\beta\gamma$ in Beziehung auf die vier Kegelschnitte, in denen sich die 16 Durchschnitte jener Tangenten befinden [377], auf der Curve und bilden das Punctquadrupel, dessen Tangentialpunct der Punct α ist, in welchem $\beta\gamma$ die Curve trifft. (*Cremona.* art. 149. e.)

398. Und daher: Die Pole von $\beta\gamma$ in Beziehung auf drei beliebige jener vier Kegelschnitte sind die Diagonalpuncte des vollständigen Vierecks, dessen Ecken gebildet werden von denjenigen vier Tangentenschnittpuncten, die auf dem vierten Kegelschnitte liegen. (*Cremona.* art. 149. e.)

399. Endlich folgt noch aus [394]: Verbindet man die Berührungspuncte derjenigen vier Tangentenpaare, deren Durchschnitte auf demselben Kegelschnitte liegen, durch gerade Linien, so schneiden sich diese in demjenigen Puncte a, der in dem Viereck der Tangentenschnittpuncte nicht als Diagonalpunct auftritt.

§. 5.

400. Nimmt man vier beliebige Puncte $p_1\, p_2\, p_3\, p_4$ als Basispuncte eines Kegelschnittbüschels und bestimmt zu einem beliebigen fünften Puncte p die Polaren in Bezug auf sämmtliche Kegelschnitte des Büschels, so schneiden sich diese Polaren in einem Puncte q (dem zu p in Beziehung auf den Kegelschnittbüschel conjugirten Pole) [111], und bilden einen Strahlenbüschel, welcher mit dem Kegelschnittbüschel projectivisch ist [114]. Erzeugt man nun durch diese beiden Büschel nach [236] eine Curve 3. O., so ist diese zugleich der geometrische Ort der Berührungspuncte der von p an die Kegelschnitte gehenden Tangenten. (*Salmon.* On curves of the third order. Phil. Trans. vol. 148. pag. 535.)

Beweis. Die Curvenpuncte sind die Durchschnitte jedes Strahles mit dem ihm entsprechenden Kegelschnitte [236]. Da nun hier jeder Strahl demjenigen Kegelschnitte entspricht, welchem der Strahl als Polare von p zugehört, so sind jene Durchschnitte zugleich die Berührungspuncte der aus p an den Kegelschnitt gehenden Tangenten [96]. (*Cremona.* art. 147.)

401. Die nach [400] erzeugte Curve 3. O. geht nicht

bloss durch die Basispuncte $p_1\, p_2\, p_3\, p_4$ des Kegelschnittbüschels, und durch den Mittelpunct q des Strahlenbüschels [236], sondern sie geht auch durch p und berührt hier den durch p gehenden Kegelschnitt K des Büschels.

Beweis. Die Tangente an K in p ist die Polare von p in Bezug auf K [99]; sie geht daher durch q und bildet den dem Kegelschnitt K entsprechenden Strahl; die beiden zugehörigen Curvenpuncte fallen also in p zusammen, und folglich haben K und die Curve im Puncte p die Gerade pq zur gemeinschaftlichen Tangente. (*Cremona.* art. 147.)

402. Legt man durch p eine beliebige Gerade G, so sind die Durchschnitte $s_1\, s_2$ derselben mit der Curve 3. O. die Doppelpuncte der Involution, welche nach [115] auf der Geraden G durch den Kegelschnittbüschel $[p_1\, p_2\, p_3\, p_4]$ erzeugt wird.

Beweis. Nach [400] sind $s_1\, s_2$ die Puncte, in welchen die Gerade G Kegelschnitte des Büschels berührt. Diese berührt aber nach [118] in der That zwei derselben, und zwar sind die Berührungspuncte die Doppelpuncte der erwähnten Involution. (*Cremona.* art. 147.)

403. Bei der nach [400] erzeugten Curve 3. O. sind die Geraden pp_1, pp_2, pp_3, pp_4 die von p an die Curve gehenden Tangenten, also $p_1\, p_2\, p_3\, p_4$ das zu p als Tangentialpunct zugehörige Punctquadrupel.

Beweis. Die Durchschnitte der Geraden pp_1 mit der Curve sind nach [402] die Puncte, in denen zwei Kegelschnitte des Büschels $[p_1\, p_2\, p_3\, p_4]$ diese Gerade berühren. Da aber diese Kegelschnitte auch durch p_1 gehen, so müssen die Berührungspuncte beide in p_1 liegen, sonst hätte die Gerade pp_1 mit jedem der beiden Kegelschnitte drei Puncte gemein. Die beiden Durchschnitte der Curve mit der Geraden pp_1 fallen also in p_1 zusammen, oder diese Gerade berührt die Curve in p_1. Ebenso ist es bei den Puncten p_2, p_3, p_4. (*Cremona.* art. 147.)

404. Durch ein Punctquadrupel $p_1\, p_2\, p_3\, p_4$ und den zugehörigen Tangentialpunct p ist eine Curve 3. O. eindeutig bestimmt, (dabei können diese fünf Puncte beliebig angenommen werden, nur so, dass keine drei von ihnen in ge-

rader Linie liegen); und zwar ist diese Curve die nach [400] erzeugte.

Beweis. Da in jedem Puncte des Quadrupels zwei Curvenpuncte auf der durch p gehenden Tangente vereinigt sind, so hat man im Ganzen neun gegebene Curvenpuncte. Von diesen liegen drei, z. B. p und die beiden in p_1 vereinigten Puncte in einer Geraden, die übrigen sechs aber liegen paarweise in p_2, p_3, p_4 vereinigt, und zwar so, dass die Verbindungslinie jedes Paares durch p geht. Daher kann durch die letzteren sechs Puncte niemals ein Kegelschnitt gelegt werden, weil drei Tangenten eines solchen sich niemals in einem Puncte schneiden. Folglich [223] kann durch die obigen neun Puncte nur eine einzige Curve 3. O. gelegt werden. Erzeugt man nun aus den gegebenen Puncten eine Curve 3. O. nach [400], so bilden in dieser nach [403] $p_1 p_2 p_3 p_4$ ein Quadrupel, dessen Tangentialpunct p ist. Mithin ist die letztere Curve 3. O. mit der ersteren identisch.

405. Man hat daher zusammenfassend: Die durch ein Punctquadrupel $p_1 p_2 p_3 p_4$ und den zugehörigen Tangentialpunct p bestimmte Curve 3. O. wird auch erzeugt durch den Kegelschnittbüschel $[p_1 p_2 p_3 p_4]$ und den Strahlenbüschel $[q]$, welcher von den Polaren von p in Beziehung auf die Kegelschnitte des ersteren Büschels gebildet wird, und ist der geometrische Ort der Berührungspuncte der aus p an die Kegelschnitte des Büschels gehenden Tangenten [400]. — Der durch p gehende Kegelschnitt dieses Büschels berührt die Curve in p [401], er ist die conische Polare des Punctes p [270]; die Tangente in p ist die Gerade pq [401]. Die Puncte s_1', s_2, in welchen eine durch p gehende Gerade G die Curve schneidet, sind die Puncte, in welchen zwei Kegelschnitte des Büschels diese Gerade berühren, und auch die Doppelpuncte der durch den Kegelschnittbüschel auf G erzeugten Involution [402].

406. Legt man durch ein Punctquadrupel einer Curve 3. O. einen Kegelschnitt, und an diesen eine Tangente in einem seiner beiden weiteren Durchschnitte mit der Curve, so geht diese Tangente durch den Tangentialpunct des Quadrupels. — Aus [405].

407. Aufgabe. Wenn eine Curve 3. O. durch ein

Punctquadrupel $p_1\, p_2\, p_3\, p_4$ und den zugehörigen Tangentialpunct p gegeben ist, die Durchschnitte $s_1\, s_2$ einer durch p gehenden Geraden G mit der Curve zu bestimmen.

Auflösung. Man bestimmt die durch den Kegelschnittbüschel $[p_1\, p_2\, p_3\, p_4]$ auf G erzeugte Involution, indem man die Durchschnitte von G mit den Geradenpaaren $p_1\, p_2, p_3\, p_4$; $p_1\, p_3, p_2\, p_4$; $p_1\, p_4, p_2\, p_3$ aufsucht, und construirt nach [75] die Doppelpuncte dieser Involution, so sind diese die gesuchten Puncte s_1 und s_2 [405].

408. Nimmt man die Puncte eines Quadrupels als Basispuncte eines Kegelschnittbüschels, so ist der zu dem Tangentialpuncte p des Quadrupels in Bezug auf den Kegelschnittbüschel conjugirte Pol q der zu p zugehörige Tangentialpunct. — Aus [405], denn q liegt auf der Curve, und die Gerade pq berührt die Curve in p. (*Cremona* art. 147.)

409. Hieraus folgt auf's Neue der Satz [388], dass nämlich die Diagonalpuncte des Vierecks $p_1 p_2 p_3 p_4$:

$$p' = (p_1 p_2, p_3 p_4),\; p'' = (p_1 p_3, p_2 p_4),\; p''' = (p_1 p_4, p_2 p_3)$$

mit p zusammen das Punctquadrupel von q bilden. Denn die Geradenpaare $(p_1 p_2, p_3 p_4)$ $(p_1 p_3, p_2 p_4)$ $(p_1 p_4, p_2 p_3)$ bilden drei Kegelschnitte des Büschels. Daher vertreten pp', pp'', pp''' die Stelle von Tangenten und p', p'', p''' die Stelle von Berührungspuncten. Mithin liegen diese Puncte auf der Curve [405]. Da ferner der Tangentialpunct q von p der conjugirte Pol zu p ist in Bezug auf den Kegelschnittbüschel, so sind $q(p'p''p''')$ die Polaren von p in Bezug auf die drei Geradenpaare, und da jede dieser Polaren den entsprechenden Kegelschnitt (das Geradenpaar) in zwei zusammenfallenden Puncten schneidet, so schneidet sie auch die Curve in zwei zusammenfallenden Puncten und berührt daher die Curve. Demnach bildet $pp'p''p'''$ das Quadrupel, welches dem Puncte q als Tangentialpunct zugehört. (*Cremona* art. 147.)

410. Auf der die Curve in p berührenden Tangente pq sind p und dessen Tangentialpunct q die Doppelpuncte der Involution, welche auf pq durch den Kegelschnittbüschel $[p_1 p_2 p_3 p_4]$ erzeugt wird. — Denn in p und q (da q auf der Curve liegt) wird die Gerade pq von zwei Kegelschnitten des Büschels berührt [405].

411. Der einem Punctquadrupel $p_1 p_2 p_3 p_4$ gegenüberliegende Punct [239] ist der Tangentialpunct q des Tangentialpunctes p des Quadrupels, oder der zweite Tangentialpunct des Quadrupels. — Aus [408], denn q ist zugleich der Mittelpunct des Strahlenbüschels, welcher mit dem Kegelschnittbüschel $[p_1 p_2 p_3 p_4]$ die Curve erzeugt [405]. (*Cremona* art. 147.)

412. Aufgabe. Wenn eine Curve 3. O. durch ein Punctquadrupel $p_1 p_2 p_3 p_4$ und den zugehörigen Tangentialpunct p gegeben ist, den Tangentialpunct q von p, und das zu q gehörige Punctquadrupel zu construiren.

Auflösung. An dem durch die fünf gegebenen Puncte $p\, p_1 p_2 p_3 p_4$ gehenden Kegelschnitte construire man die Tangente t in p, schneide dieselbe mit einem der drei durch $p_1 p_2 p_3 p_4$ gehenden Geradenpaare, z. B. mit $p_1 p_2$ in α und mit $p_3 p_4$ in β, und bestimme in Bezug auf $\alpha\beta$ den zu p zugeordneten harmonischen Punct, so ist dies der verlangte Tangentialpunct q. Denn da nach [410] p der eine Doppelpunct der auf der Tangente t durch den Kegelschnittbüschel $[p_1 p_2 p_3 p_4]$ erzeugten Involution ist, so wird in Folge dieser Construction q der zweite Doppelpunct [40], und daher [410] der verlangte Tangentialpunct. — Bezeichnet man ferner mit $p'\, p''\, p'''$ die Durchschnitte

$$p' = (p_1 p_2,\, p_3 p_4),\quad p'' = (p_1 p_3,\, p_2 p_4),\quad p''' = (p_1 p_4,\, p_2 p_3),$$

so bilden p, p', p'', p''' das zu q gehörige Punctquadrupel [409]. (*Em. Weyr* l. c. [378] pag. 637.) Vgl. [487.]

413. Wenn der einem Punctquadrupel zugehörige Tangentialpunct p mit zwei Diagonalpuncten, z. B. p', p'' des Quadrupels in gerader Linie liegt, so ist der dritte Diagonalpunct p''' ein Wendepunct, und die Gerade $p'\, p''$ dessen harmonische Polare. — Aus [374], denn $p\, p'\, p''$ sind nach [409] die Berührungspuncte dreier von einem Curvenpuncte ausgehender Tangenten. Der Berührungspunct p''' der vierten Tangente aber fällt dann mit dem Wendepuncte zusammen.

414. Wenn vier Puncte $p_1 p_2 p_3 p_4$ einer Curve 3. O. so liegen, dass die Diagonalpuncte $p'\, p''\, p'''$ des von jenen gebildeten vollständigen Vierecks sich ebenfalls auf der Curve befinden, so bilden die ersteren vier Puncte ein Punctquadrupel, d. h. sie haben einen gemeinschaftlichen Tangential-

punct, und dieser bildet dann nach [409] mit den Diagonalpuncten $p' p'' p'''$ ein neues Punctquadrupel. (*Em. Weyr* l. c. [378] pag. 639.)

Beweis. Die Geradenpaare $p'(p_1p_2, p_3p_4)$ und $p''(p_1p_3, p_2p_4)$ bilden ein vollständiges Vierseit, dessen Ecken $p_1p_2p_3p_4p'p''$ auf der Curve liegen. Nach [379] sind daher die gegenüberliegenden Ecken $p_1 p_4$ correspondirende Puncte, haben also einen gemeinschaftlichen Tangentialpunct; ebenso auch $p_2 p_3$. Nun bilden aber auch $p''(p_1p_3, p_2p_4)$ und $p'''(p_1p_4, p_2p_3)$ ein vollständiges Vierseit, dessen Ecken $p_1 p_2 p_3 p_4 p'' p'''$ auf der Curve liegen. Mithin sind auch $p_1 p_2$ correspondirende Puncte, und ebenso $p_3 p_4$, und folglich haben alle vier Puncte denselben Tangentialpunct.

415. Alle Curven 3. O., welche durch die Ecken $p_1p_2p_3p_4$ und die Diagonalpuncte $p' p'' p'''$ eines vollständigen Vierecks gelegt werden können, haben die ersteren vier Puncte zu einem Punctquadrupel, und der gemeinschaftliche Tangentialpunct des letzteren (der für jede Curve ein anderer sein wird) bildet mit $p' p'' p'''$ ein neues Punctquadrupel. — Aus [414]. (*Em. Weyr* l. c. [378] pag. 639.)

416. Ist von einer Curve 3. O. ein Punctquadrupel gegeben, d. h. vier Puncte von der Beschaffenheit, dass sie einen gemeinschaftlichen Tangentialpunct besitzen, ohne dass jedoch dieser letztere gegeben ist, so ist die Curve bestimmt, wenn noch zwei weitere Curvenpuncte $s_1 s_2$ gegeben sind: (Eine Ausnahme siehe [419]). — Denn da die Curve auch immer durch die Diagonalpuncte des Quadrupels geht [409], so sind durch das letztere sieben Curvenpuncte gegeben.

417. Aufgabe. Wenn eine Curve 3. O. durch ein Punctquadrupel $p_1 p_2 p_3 p_4$ und zwei weitere Curvenpuncte $s_1 s_2$ gegeben ist, den dem Quadrupel zugehörigen Tangentialpunct p zu construiren.

Auflösung. Man construire an den beiden durch $p_1 p_2 p_3 p_4 s_1$ und durch $p_1 p_2 p_3 p_4 s_2$ gehenden Kegelschnitten die Tangenten in s_1 und s_2. Der Durchschnitt dieser beiden Tangenten ist der gesuchte Tangentialpunct p. — Denn die in einem Schnittpuncte s_1 oder s_2 der Curve mit einem durch das Quadrupel gehenden Kegelschnitte an diesen gelegte Tangente muss durch p gehen [406]. (*Em. Weyr.* l. c. [378] pag. 640.)

418. Für alle Curven 3. O., welche durch die Ecken $p_1\,p_2\,p_3\,p_4$ und die Diagonalpuncte $p'\,p''\,p'''$ eines vollständigen Vierecks, und ausserdem durch einen achten Punct s_1 gehen, (welche Curven also [415] die Puncte $p_1\,p_2\,p_3\,p_4$ zu einem Punctquadrupel haben) liegen die diesem Punctquadrupel zugehörigen Tangentialpuncte p auf der Geraden $s_1\,s_2$, welche s_1 mit dem zu s_1 in Bezug auf den Kegelschnittbüschel $[p_1 p_2 p_3 p_4]$ conjugirten Pole s_2 verbindet.

Beweis. Die Puncte s_1, s_2 sind die Doppelpuncte der auf der Geraden $s_1\,s_2$ durch den Kegelschnittbüschel $[p_1 p_2 p_3 p_4]$ erzeugten Involution, oder die Puncte, in welchen zwei Kegelschnitte dieses Büschels die Gerade $s_1\,s_2$ berühren [119]. Da also die Gerade $s_1\,s_2$ den Kegelschnitt $p_1\,p_2\,p_3\,p_4\,s_1$ in s_1 und den Kegelschnitt $p_1\,p_2\,p_3\,p_4\,s_2$ in s_2 berührt, so geht sie nach [406] durch p; variirt man daher die Curve, während $p_1 p_2 p_3 p_4$ und s_1, und folglich auch s_2 fest bleiben, so liegt p jedesmal auf $s_1\,s_2$. (*Em. Weyr.* l. c. [378] pag. 640.)

419. Alle Curven 3. O., welche durch die in [418] angegebenen acht Puncte gehen, schneiden sich ausserdem in dem zu s_1 in Bezug auf den Kegelschnittbüschel $[p_1 p_2 p_3 p_4]$ conjugirten Pole s_2. — Denn aus [418] geht unmittelbar hervor, dass auch s_2 jedesmal auf der Curve liegen muss, da er der Berührungspunct einer aus p an einen Kegelschnitt des Büschels gehenden Tangente ist. (*Em. Weyr* l. c. [378] pag. 640.)

Zusatz. Hieraus folgt die in [416] erwähnte Ausnahme. Nämlich eine Curve 3. O. ist durch ein Punctquadrupel $p_1\,p_2\,p_3\,p_4$ und zwei weitere Curvenpuncte $s_1\,s_2$ dann und nur dann nicht eindeutig bestimmt, wenn s_1 und s_2 conjugirte Pole in Bezug auf den Kegelschnittbüschel $[p_1\,p_2\,p_3\,p_4]$ sind.

420. Aufgabe. Für alle Curven 3. O., welche durch die Ecken $p_1\,p_2\,p_3\,p_4$ und die Diagonalpuncte $p'\,p''\,p'''$ eines vollständigen Vierecks und ausserdem durch einen achten Punct s_1 gehen, den gemeinsamen neunten Durchschnittspunct s_2 zu construiren.

Auflösung. Man construire die Polaren von s_1 in Beziehung auf zwei der drei Geradenpaare, welche durch $p_1 p_2 p_3 p_4$ gehen. Der Durchschnitt dieser beiden Polaren ist der gesuchte Punct s_2. — Aus [419], denn der so construirte Punct s_2

ist der zu s_1 in Beziehung auf den Kegelschnittbüschel $[p_1 p_2 p_3 p_4]$ conjugirte Pol. (*Em. Weyr.* l. c. [378] pag. 640.)

421. Zieht man aus einem Curvenpuncte α eine beliebige Gerade, welche die Curve in β, γ schneide, und eine Tangente αa_1 mit dem Berührungspuncte a_1, ferner aus a_1 die vier Tangenten mit den Berührungspuncten $p_1 p_2 p_3 p_4$, so liegen die letzteren vier Puncte mit $\beta \gamma$ in einem Kegelschnitte.

Beweis. Der dem Punctquadrupel $p_1 p_2 p_3 p_4$ gegenüberliegende Punct ist α [411], daher liegen $\beta \gamma$ mit diesem Quadrupel in einem Kegelschnitte [244 Zus.].

422. Seien α, β, γ drei Curvenpuncte in gerader Linie, $a_1 a_2 a_3 a_4$ das zu α, und $p_1 p_2 p_3 p_4$ das zu a_1 gehörige Punctquadrupel, ferner $B_1 B_2 B_3 B_4$; $C_1 C_2 C_3 C_4$ die resp. aus β und γ an die Curve gehenden Tangenten. Bezeichnet man dann wie in [393] mit $\varkappa_{11} \lambda_{22} \mu_{33} \nu_{44}$ die Tangentenschnittpuncte $(B_1 C_1)$, $(B_2 C_2)$, $(B_3 C_3)$, $(B_4 C_4)$, welche nach [395], [377] mit $\beta \gamma$ in einem Kegelschnitte liegen, so geht dieser Kegelschnitt $\beta \gamma \varkappa_{11} \lambda_{22} \mu_{33} \nu_{44}$ auch durch $p_1 p_2 p_3 p_4$.

Beweis. Die Puncte $a_2 a_3 a_4$ sind nach [394] die Diagonalpuncte des Vierecks $\varkappa_{11} \lambda_{22} \mu_{33} \nu_{44}$, zugleich aber nach [409], [388] auch die Diagonalpuncte des Vierecks $p_1 p_2 p_3 p_4$. Mithin ist [108] das Dreieck $a_2 a_3 a_4$ sowohl allen Kegelschnitten des Büschels $[\varkappa_{11} \lambda_{22} \mu_{33} \nu_{44}]$, als auch allen Kegelschnitten des Büschels $[p_1 p_2 p_3 p_4]$ conjugirt. In jedem dieser beiden Büschel aber giebt es einen Kegelschnitt, der durch β, γ geht [421]. Diese beiden Kegelschnitte haben also zwei Puncte β, γ gemein und sind demselben Dreieck $a_2 a_3 a_4$ conjugirt, folglich [110] müssen sie noch drei weitere Puncte mit einander gemein haben und daher identisch sein. (*Cremona.* art. 149 f. *Sam. Roberts.* On the intersections etc. Quart. Journ. III. pag. 121.)

423. Bezeichnet man, um den vorigen Satz vollständig zu haben, die Berührungspuncte der Tangenten

aus a_1 mit $p_1 p_2 p_3 p_4$
„ a_2 „ $q_1 q_2 q_3 q_4$
„ a_3 „ $r_1 r_2 r_3 r_4$
„ a_4 „ $s_1 s_2 s_3 s_4$,

und wendet für die Durchschnitte der Tangenten B und C

die Bezeichnung von [393] an, so liegen folgende Puncte in Kegelschnitten:

$$\begin{array}{llllllll} \beta\,\gamma\,\varkappa_{11} & \lambda_{22} & \mu_{33} & \nu_{44} & p_1\,p_2\,p_3\,p_4 \\ \beta\,\gamma\,\varkappa'_{12} & \lambda'_{21} & \mu'_{34} & \nu'_{43} & q_1\,q_2\,q_3\,q_4 \\ \beta\,\gamma\,\varkappa''_{13} & \lambda''_{24} & \mu''_{31} & \nu''_{42} & r_1\,r_2\,r_3\,r_4 \\ \beta\,\gamma\,\varkappa'''_{14} & \lambda'''_{23} & \mu'''_{32} & \nu'''_{41} & s_1\,s_2\,s_3\,s_4. \end{array}$$

§. 6.

424. Sind $a\,a'$, $b\,b'$, $c\,c'$ drei beliebige Punctepaare, so ist der geometrische Ort der Puncte p, für welche die drei Strahlenpaare $p(a\,a'\;b\,b'\;c\,c')$ conjugirte Paare einer Involution bilden, eine Curve 3. O., welche hindurchgeht durch die sechs gegebenen Puncte und ausserdem durch die drei Punctepaare, welche durch je zwei der gegebenen Paare bestimmt werden, d. h. [82] durch die Durchschnitte

$$(b\,c,\;b'\,c') = f,\quad (c\,a,\;c'\,a') = g,\quad (a\,b,\;a'\,b') = h$$
$$(b\,c',\;b'\,c) = f',\quad (c'\,a,\;c\,a') = g',\quad (a\,b',\;a'\,b) = h'.$$

Beweis. Bezeichnet man die Strahlen $p\,a$, $p\,a'$, etc. kurz durch a, a', etc., so ist die Bedingung der Involution nach [67] durch jede der folgenden vier Gleichungen ausgedrückt

$$\sin(a\,b')\,\sin(b\,c')\,\sin(c\,a') = \sin(a\,c')\,\sin(b\,a')\,\sin(c\,b')$$
$$\sin(a\,b')\,\sin(b\,c)\,\sin(c'\,a') = \sin(a\,c)\,\sin(b\,a')\,\sin(c'\,b')$$
$$\sin(b\,c')\,\sin(c\,a)\,\sin(a'\,b') = \sin(b\,a)\,\sin(c\,b')\,\sin(a'\,c')$$
$$\sin(c\,a')\,\sin(a\,b)\,\sin(b'\,c') = \sin(c\,b)\,\sin(a\,c')\,\sin(b'\,a').$$

Diese Gleichungen kann man etwas umformen. Bezeichnen nämlich $\alpha, \alpha', \beta, \beta' \ldots$ die Winkel, welche die Strahlen $a, a', b, b', \ldots$ mit einer beliebig angenommen x-Axe einschliessen, so treten durch deren Einführung statt der Winkel $(a\,b')$, $(b\,c')\ldots$ die Differenzen $\alpha - \beta'$, $\beta - \gamma' \ldots$ auf (oder vielmehr deren entgegengesetzte Werthe, was aber die Gleichungen ungeändert lässt). Entwickelt man nun die Sinus dieser Differenzen und dividirt mit dem Product aller sechs Cosinus, so werden die Gleichungen von der Form

$$(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta')\,(\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\gamma')\ldots = \ldots$$

Lässt man dann die Buchstaben $\alpha, \beta, \ldots$ statt der Winkel die Tangenten derselben bedeuten, so verwandeln sich die vorigen Gleichungen in folgende:

$$(\alpha - \beta')(\beta - \gamma')(\gamma - \alpha') = (\alpha - \gamma')(\beta - \alpha')(\gamma - \beta')$$
$$(\alpha - \beta')(\beta - \gamma)(\gamma' - \alpha') = (\alpha - \gamma)(\beta - \alpha')(\gamma' - \beta')$$
$$(\beta - \gamma')(\gamma - \alpha)(\alpha' - \beta') = (\beta - \alpha)(\gamma - \beta')(\alpha' - \gamma')$$
$$(\gamma - \alpha')(\alpha - \beta)(\beta' - \gamma') = (\gamma - \beta)(\alpha - \gamma')(\beta' - \alpha').$$

Nun kann man jede dieser Gleichungen als eine Curve darstellend auffassen, natürlich alle derselben Curve angehörend, da alle vier nur dasselbe besagen. Bezeichnet man nämlich mit x, y die rechtwinkligen Coordinaten der Puncte $p, a, b, \ldots$, indem man diese Buchstaben als Indices zu x, y hinzufügt, so ist, da z. B. α die Tangente des Winkels bedeutet, welche die Gerade $p\,a$ mit der x-Axe bildet,

$$\alpha = \frac{y_p - y_a}{x_p - x_a}$$

und ebenso

$$\alpha - \beta' = \frac{y_p - y_a}{x_p - x_a} - \frac{y_p - y_{b'}}{x_p - x_{b'}}, \text{ etc.}$$

Daher bedeutet z. B. $\alpha - \beta' = 0$ bei veränderlichen x_p, y_p die Gleichung der Geraden $a\,b'$, und ebenso bei den übrigen. In dieser Gestalt sind daher die vorigen Gleichungen verschiedene Formen der Gleichung des gesuchten geometrischen Ortes, und dieser ist somit eine Curve 3. O. Drückt man den linken Theil der Gleichung, welche eine Gerade $a\,b'$ darstellt, kurz durch $a\,b'$ aus, so kann man die vorigen Gleichungen auch schreiben:

$$a\,b' \,.\, b\,c' \,.\, c\,a' = a\,c' \,.\, b\,a' \,.\, c\,b' \quad \ldots \text{ I.}$$
$$a\,b' \,.\, b\,c \,.\, c'a' = a\,c \,.\, b\,a' \,.\, c'b' \quad \ldots \text{ II.}$$
$$b\,c' \,.\, c\,a \,.\, a'b' = b\,a \,.\, c\,b' \,.\, a'c' \quad \ldots \text{ III.}$$
$$c\,a' \,.\, a\,b \,.\, b'c' = c\,b \,.\, a\,c' \,.\, b'a' \quad \ldots \text{ IV.}$$

Die Gleichung I. zeigt, dass diese Curve hindurchgeht durch die Durchschnittspuncte

$$(ab', ac') = a,\ \ (ab', ba') = h',\ \ (ab', cb') = b'$$
$$(bc', ac') = c',\ \ (b\,c', b\,a') = b,\ \ (bc', cb') = f'$$
$$(ca', ac') = g',\ \ (c\,a', b\,a') = a',\ \ (c\,a', cb') = c,$$

sodann II., dass sie ausserdem geht durch

$$(b\,c,\ c'b') = f \qquad (c'a',\ a\,c) = g;$$

endlich III., dass sie auch geht durch

$$(a'b',\ b\,a) = h.$$

(*Cayley.* Mémoire sur les courbes du troisième ordre. Liouville Journ. Bd. 9. pag. 287.)

425. Wenn eine Curve 3. O. durch irgend zehn von den zwölf Puncten $a\,b\,c$, $a'\,b'\,c'$, $f\,g\,h$, $f'\,g'\,h'$ [424] geht, so geht sie auch durch die beiden übrigen und hat die Eigenschaft, dass die von jedem ihrer Puncte p nach den Punctepaaren aa', bb', cc' gehenden Strahlenpaare in Involution sind. — Denn durch zehn Puncte kann niemals mehr als eine Curve 3. O. gehen; da nun der in [424] bestimmte geometrische Ort der Puncte p durch alle zwölf Puncte geht, so muss eine Curve 3. O., welche durch zehn dieser Puncte geht, dieser geometrische Ort sein.

Zusatz. Dasselbe gilt, allgemein zu reden, schon von einer Curve, welche durch neun jener Puncte geht, aber diese können dann nicht beliebig unter den zwölf gewählt werden, sondern nur so, dass sie nicht die Durchschnitte von zwei Mal drei Geraden bilden. (*Cayley.* l. c. [424] pag. 288.)

426. Wenn zwei Punctepaare so auf einer Curve 3. O. liegen, dass das durch sie nach [82] bestimmte dritte Punctepaar sich ebenfalls auf der Curve befindet, so sollen sie correspondirende Punctepaare heissen. (*Cayley* l. c. [424] pag. 288.)

427. Sind aa', bb' zwei correspondirende Punctepaare einer Curve 3. O., und ist das Paar cc' correspondirend mit aa', so ist es auch correspondirend mit bb', und die aus jedem Puncte der Curve nach den Punctepaaren aa', bb', cc' gehenden Strahlenpaare sind conjugirte Paare einer Involution.

Beweis. Die Paare aa', bb' bestimmen das Paar hh'; aa', cc' bestimmen gg' [424]. Diese zehn Puncte liegen der Annahme nach auf der Curve; demnach [425] liegt auch das durch bb', cc' bestimmte Paar ff' auf der Curve, d. h. bb', cc' sind correspondirende Punctepaare, und die Curve 3. O. ist der geometrische Ort der Puncte p, von welchen die Strahlen

$p(aa', bb', cc')$ eine Involution bilden [425]. (*Cayley* l. c. [424] pag. 288.)

428. Zwei correspondirende Punctepaare aa', bb', d. h. zwei so auf der Curve liegende Punctepaare, dass das durch sie bestimmte dritte Punctepaar cc' ebenfalls auf der Curve liegt, sind auch stets zwei Paare correspondirender Puncte, (d. h. jedes Paar hat einen gemeinschaftlichen Tangentialpunct). — Aus [379], denn die drei Punctepaare aa', bb', cc' bilden dann die Ecken eines vollständigen Vierseits [82]. Das Umgekehrte gilt aber nicht. Vgl. [489, 491].

Achter Abschnitt.

Conjugirte Pole der Hesse'schen Curve.

§. 1.

429. In Beziehung auf einen Kegelschnitt hat jeder Punct x unendlich viele conjugirte Pole, nämlich alle auf der Polare von x liegenden Puncte [95]. In Beziehung auf einen Kegelschnittbüschel hat jeder Punct x im Allgemeinen einen einzigen bestimmten conjugirten Pol [111], nur wenn x der Durchschnitt der Verbindungsgeraden je zweier Basispuncte des Büschels ist, hat er unendlich viele Pole, nämlich alle Puncte der alsdann gemeinschaftlichen Polare von x in Bezug auf alle Kegelschnitte des Büschels [106]. In Beziehung auf ein Kegelschnittnetz aber, oder in Beziehung auf drei Kegelschnitte, die sich nicht in vier gemeinsamen Puncten schneiden, hat nicht jeder Punct einen conjugirten Pol, d. h. nicht für jeden Punct x schneiden sich die drei Polaren in Beziehung auf die drei Kegelschnitte in einem und demselben Puncte, sondern damit diese Eigenschaft stattfinde, muss x besondere Lagen haben.

430. Die Puncte x, welche in Beziehung auf drei beliebig gegebene Kegelschnitte $u = 0$, $v = 0$, $w = 0$ einen conjugirten Pol haben, liegen sammt ihren conjugirten Polen auf einer Curve 3. O., welche zugleich der geometrische Ort dieser Puncte ist.

Beweis. Seien x_1, x_2, x_3 die Variabeln der Functionen u, v, w, und man bezeichne die partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ etc. durch u_i, etc. Dann haben die Polaren von x in Bezug auf die drei Kegelschnitte $u = 0$, $v = 0$, $w = 0$ bei veränderlichen $y_1\, y_2\, y_3$ nach [95] die Gleichungen

$$(1)\qquad \begin{aligned} y_1 u_1 + y_2 u_2 + y_3 u_3 &= 0 \\ y_1 v_1 + y_2 v_2 + y_3 v_3 &= 0 \\ y_1 w_1 + y_2 w_2 + y_3 w_3 &= 0. \end{aligned}$$

Sollen diese drei Geraden sich in einem Puncte schneiden, so ist dazu erforderlich und hinreichend, dass

$$(2)\qquad \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = 0$$

ist. Da die Functionen der x_i, welche die Elemente dieser Determinante bilden, vom ersten Grade sind, so ist der geometrische Ort der Puncte x eine Curve 3. O. — Der zu einem der Puncte x conjugirte Pol y, in welchem sich die drei Geraden (1) schneiden, liegt auf derselben Curve 3. O. Denn diese Gleichungen stellen sich kurz dar [1] durch

$$\Delta_y(u_x) = 0, \qquad \Delta_y(v_x) = 0, \qquad \Delta_y(w_x) = 0.$$

Da aber die Functionen u, v, w vom zweiten Grade sind, so lassen sich dieselben Gleichungen auch darstellen [5] durch

$$\Delta_x(u_y) = 0, \qquad \Delta_x(v_y) = 0, \qquad \Delta_x(w_y) = 0,$$

d. h. wenn die u, v, w als Functionen der y betrachtet, und die partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial u}{\partial y_i}$ etc. wieder mit u_i etc. bezeichnet werden, durch

$$\begin{aligned} x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3 &= 0 \\ x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 &= 0 \\ x_1 w_1 + x_2 w_2 + x_3 w_3 &= 0. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen aber bestehen dann und nur dann zusammen, wenn der Gleichung (2) auch von den y_i genügt wird; d. h. der Punct y liegt auf dem geometrischen Orte der Puncte x. Zugleich bestätigen diese Gleichungen, dass wenn y conjugirter Pol zu x ist, so ist auch x conjugirter Pol

zu y. (*Hesse*. Ueber die Wendepuncte der Curve 3. O. Crelle's Journ. Bd. 28. pag. 105.)

431. Sind x und y conjugirte Pole in Beziehung auf drei Kegelschnitte $u = 0$, $v = 0$, $w = 0$, so sind sie es auch in Beziehung auf alle Kegelschnitte des Netzes, welchem die gegebenen drei als Leitcurven angehören.

Beweis. Bedeuten $\varkappa$, λ, μ willkürliche Parameter, so kann jeder Kegelschnitt des Netzes durch die Gleichung

$$\varkappa\, u + \lambda\, v + \mu\, w = 0$$

dargestellt werden [195]. Die Polare des Punctes x in Beziehung auf denselben hat die Gleichung

$$\varkappa\, \varDelta_y(u_x) + \lambda\, \varDelta_y(v_x) + \mu\, \varDelta_y(w_x) = 0;$$

diese aber wird unabhängig von den Werthen von $\varkappa$, λ, μ erfüllt, wenn der Punct y der Durchschnitt der Geraden $\varDelta_y(u_x) = 0$, $\varDelta_y(v_x) = 0$, $\varDelta_y(w_x) = 0$ ist; d. h. die Polare von x in Bezug auf jeden Kegelschnitt des Netzes geht durch den zu x conjugirten Pol y. (*Hesse* l. c. [430] pag. 105.)

432. Die Curve 3. O., welche den geometrischen Ort der in Beziehung auf ein Kegelschnittnetz conjugirten Pole bildet, heisst die Hesse'sche Curve des Netzes (*Cremona* art .132. b.) (Tripelcurve. *Schröter*. Steiner's Vorlesungen pag. 533.). Sind $u = 0$, $v = 0$, $w = 0$ drei Kegelschnitte des Netzes, so ist ihre Gleichung nach [430]

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = 0.$$

433. Aufgabe. Wenn drei Kegelschnitte $u = 0$, $v = 0$, $w = 0$ als Leitcurven eines Kegelschnittnetzes gegeben sind, die Hesse'sche Curve des Netzes zu construiren.

Auflösung. Man lege durch die vier Schnittpuncte $a\ b\ c\ d$ von u und v einen beliebigen Kegelschnitt u' und bezeichne die Schnitte desselben mit w durch $\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta$. Legt man durch diese vier Puncte ein Geradenpaar, so ist der Schnittpunct p desselben ein Punct der Hesse'schen Curve des Netzes. Man erhält dadurch sofort drei Puncte dieser Curve, und indem man den durch die Puncte $a\ b\ c\ d$ gelegten Kegelschnitt u' variirt, beliebig viele. (*Hesse* l. c. [430] pag. 105.)

Beweis. Es ist zu zeigen, dass die Polaren des Punctes p in Beziehung auf alle Kegelschnitte $\varkappa u + \lambda v + \mu w = 0$ des Netzes sich in einem Puncte schneiden. Nun ist

$$(1) \qquad u' = u + \lambda v = 0$$

ein beliebiger durch die Schnitte $a\ b\ c\ d$ von u und v gehender Kegelschnitt. Zieht man durch die Durchschnitte $\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta$ von u' und w ein Geradenpaar, so ist der Schnitt p desselben ein Punct, dessen Polaren in Beziehung auf alle Kegelschnitte v', die durch die Schnitte $\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta$ von u' und w gehen, in eine und dieselbe Gerade zusammenfallen [106]. Diese Kegelschnitte lassen sich darstellen durch

$$(2) \qquad v' = u' + \mu w = 0.$$

Nun kann man aber mit Hülfe der Gleichungen (1) und (2) der Gleichung jedes Kegelschnittes des Netzes folgende Formen geben:

$$\begin{aligned} 0 = \varkappa u + \lambda v + \mu w &= (\varkappa - 1) u + u + \lambda v + \mu w \\ &= (\varkappa - 1) u + u' + \mu w \\ &= (\varkappa - 1) u + v'; \end{aligned}$$

also geht jeder Kegelschnitt des Netzes durch die Schnitte des festen Kegelschnittes u mit dem variablen Kegelschnitte v' hindurch. Daher geht die Polare des Punctes p in Beziehung auf jeden Kegelschnitt des Netzes durch den Punct q, in dem die Polaren von p in Bezug auf u und v' sich schneiden [111]. Allein die Polare von p in Bezug auf den veränderlichen Kegelschnitt v' ist eine unveränderliche Gerade, der Kegelschnitt u ist ebenfalls fest, also ist auch q ein fester Punct.

434. Die sämmtlichen conischen Polaren aller Puncte der Ebene in Bezug auf eine Curve 3. O. $u = 0$ bilden ein Kegelschnittnetz [287]. Die Hesse'sche Curve dieses Netzes ist zugleich die Hesse'sche Curve $H(u) = 0$ der Curve $u = 0$.

Beweis. Die Gleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial x_2} = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial x_3} = 0$$

stellen drei conische Polaren dar, nämlich diejenigen, welche den Ecken des Fundamentaldreiecks angehören. Die Polaren eines Punctes x in Beziehung auf diese Kegelschnitte haben die Gleichungen

$$y_1 u_{11} + y_2 u_{12} + y_3 u_{13} = 0$$
(1)
$$y_1 u_{21} + y_2 u_{22} + y_3 u_{23} = 0$$
$$y_1 u_{31} + y_2 u_{32} + y_3 u_{33} = 0.$$

Die Gleichung der Hesse'schen Curve des Netzes, welche die Bedingung ausdrückt, dass diese drei Geraden sich in einem Puncte, nämlich dem zu x conjugirten Pole y schneiden, ist daher

$$H(u) = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Zusatz. Die Gleichungen (1) enthalten zugleich die Bedingung, dass zwei Puncte x und y conjugirte Pole sind in Beziehung auf das von den conischen Polaren gebildete Netz. Sie bleiben nach [315] ungeändert, wenn man x mit y vertauscht.

435. Aufgabe. Zu einer gegebenen Curve 3. O. die Hesse'sche Curve zu construiren.

Auflösung. Man construire zu drei beliebig gewählten, nicht in einer Geraden liegenden Puncten die conischen Polaren [306] [307], betrachte diese als einem Kegelschnittnetze angehörig und construire nach [433] die Hesse'sche Curve dieses Netzes, so ist diese die verlangte Hesse'sche Curve [434].

§. 2.

436. Die Hesse'sche Curve $H(u) = 0$ einer Curve 3. O. $u = 0$ hat die doppelte Eigenschaft: sie ist sowohl der geometrische Ort der Puncte, deren conische Polaren aus Geradenpaaren bestehen, als auch der geometrische Ort der Doppelpuncte dieser Geradenpaare. — Aus [191], da die erste Polare in Beziehung auf eine Curve 3. O. die conische Polare ist. (*Salmon* pag. 154.)

437. Sind x und y zwei conjugirte Pole in Beziehung auf das von den conischen Polaren gebildete Kegelschnittnetz, also zugleich [434] zwei Puncte der Hesse'schen Curve, so ist die conische Polare von x ein Geradenpaar, das sich in y schneidet, und die conische Polare von y ein Geradenpaar, das sich in x schneidet. Und umgekehrt: Ist die co-

nische Polare eines Punctes x ein Geradenpaar, das sich in y schneidet, so ist die conische Polare von y ein Geradenpaar, das sich in x schneidet, und x und y sind conjugirte Pole in Beziehung auf das von den conischen Polaren gebildete Kegelschnittnetz.

Beweis. Wenn x und y der Hesse'schen Curve angehören, so bestehen ihre conischen Polaren aus Geradenpaaren [268], und umgekehrt: besteht die conische Polare von x aus einem Geradenpaar, das sich in y schneidet, so liegt sowohl x als auch y auf der Hesse'schen Curve [436]. Nun ist die Gleichung der conischen Polare von x bei veränderlichen y_i [267]

(1) $y_1^2 u_{11} + y_2^2 u_{22} + y_3^2 u_{33} + 2 y_2 y_3 u_{23} + 2 y_3 y_1 u_{31} + 2 y_1 y_2 u_{12} = 0.$

Besteht diese aus zwei Geraden, so gelten nach [84] gleichzeitig die drei Gleichungen

$$(2) \qquad \begin{aligned} y_1 u_{11} + y_2 u_{12} + y_3 u_{13} &= 0 \\ y_1 u_{21} + y_2 u_{22} + y_3 u_{23} &= 0 \\ y_1 u_{31} + y_2 u_{32} + y_3 u_{33} &= 0, \end{aligned}$$

und der Punct y, dessen Coordinaten diesen Gleichungen genügen, ist der Durchschnitt der beiden Geraden. Umgekehrt: gelten diese Gleichungen zusammen für einen Punct y, so besteht der Kegelschnitt (1) aus zwei Geraden, die sich in diesem Puncte y schneiden [84]. Die Gleichungen (2) sagen aber nach [434] aus, dass x und y conjugirte Pole in Bezug auf das von den conischen Polaren gebildete Kegelschnittnetz sind. Vertauscht man x mit y, so stellt die Gleichung (1) die conische Polare des Punctes y in veränderlichen x_i dar, die Gleichungen (2) aber bleiben ungeändert [434], daher ist die conische Polare von y ein Geradenpaar, das sich in x schneidet. (*Salmon* pag. 154.)

438. Nach diesem Satze gehören alle Puncte der Hesse'schen Curve $H(u) = 0$ paarweise zusammen, in der Art, dass bei jedem Paare die aus einem Geradenpaar bestehende conische Polare des einen Punctes in dem anderen ihren Doppelpunct hat, und gleichzeitig bildet ein solches Punctepaar ein conjugirtes Polepaar in Beziehung auf jede conische Polare. Aus diesem Grunde sollen zwei solche zusammengehörige

Puncte der Hesse'schen Curve conjugirte Pole der Hesse'schen Curve genannt werden. (*Hesse*. Ueber Curven 3. O. etc. Crelle's Journ. Bd. 36. pag. 151.)

439. Hat die Curve 3. O. $u = 0$ einen Doppelpunct d, so fallen in diesen Punct zwei conjugirte Pole der Hesse'schen Curve zusammen.

Beweis. Der Doppelpunct d liegt auf der Hesse'schen Curve [164], und die conische Polare von d ist das Tangentenpaar in diesem Puncte [181], also fällt der Schnittpunct desselben nach d, und dieser Schnittpunct ist der zu d conjugirte Pol [438].

440. Wenn die Hesse'sche Curve $H(u) = 0$ einer Curve 3. O. $u = 0$ keinen Doppelpunct hat, in welchem Falle die Curve $u = 0$ nach [164] ebenfalls keinen Doppelpunct besitzt, so fallen in der Hesse'schen Curve keine zwei conjugirten Pole aufeinander.

Beweis. Wenn ein Punct x mit seinem conjugirten Pole zusammen fiele, so müsste die conische Polare von x durch diesen Punct hindurch gehen [438], und daher x auf der Curve u liegen [178]. Demnach müsste x einer der Durchschnitte der Curve u mit der Hesse'schen Curve $H(u)$ sein, also, da u keinen Doppelpunct hat, ein Wendepunct der Curve u [157]. Aber die conische Polare eines Wendepunctes besteht aus der Wendetangente und der harmonischen Polare [280], und diese beiden Geraden könnten sich nach [363] nur dann in dem Wendepuncte treffen, wenn durch diesen noch eine zweite Wendetangente hindurchginge, was nicht möglich ist.

§. 3.

441. Sind aa' und bb' zwei Paare conjugirter Pole der Hesse'schen Curve, so ist das durch sie bestimmte dritte Punctepaar cc' [82] ebenfalls ein Paar conjugirter Pole der Hesse'schen Curve. — Denn zwei conjugirte Pole der Hesse'schen Curve sind zugleich conjugirte Pole in Bezug auf jede conische Polare [438]; dann aber ist cc' ebenfalls ein Paar conjugirter Pole in Bezug auf jeden dieser Kegelschnitte [121].

442. Zwei Paare conjugirter Pole der Hesse'schen Curve

sind stets correspondirende Punctepaare [426]; denn das durch sie bestimmte dritte Punctepaar liegt [441] ebenfalls auf der Hesse'schen Curve.

443. Zwei conjugirte Pole aa' der Hesse'schen Curve sind stets auch correspondirende Puncte, d. h. sie haben einen gemeinschaftlichen Tangentialpunct [378]. (*Cremona.* art. 133. a)

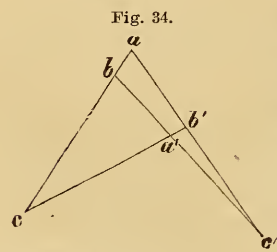
Beweis. Nimmt man noch ein zweites Paar conjugirter Pole bb' hinzu, so ist das dadurch bestimmte dritte Punctepaar cc' ebenfalls ein Paar conjugirter Pole [441]. Nun bilden diese sechs Puncte die Ecken eines vollständigen Vierseits und liegen auf der Hesse'schen Curve, also [379] schneiden sich die in den gegenüberliegenden Ecken aa', bb', cc' an die Hesse'sche Curve gezogenen Tangenten auf dieser Curve, und zwar in drei Puncten, die in gerader Linie liegen.

444. Vier mit einander correspondirende Puncte $aa'\ bb'$ der Hesse'schen Curve, welche ein Quadrupel bilden [378], bilden stets zwei Paare conjugirter Pole. — Denn der conjugirte Pol eines dieser Puncte, z. B. a, muss sich unter den mit a correspondirenden Puncten befinden [443]; ist derselbe a', so muss auch der zu b conjugirte Pol sich unter den mit einander correspondirenden Puncten befinden und kann kein anderer als b' sein, weil jedem Puncte ein und nur ein bestimmter conjugirter Pol zugehört, und niemals zwei Pole zusammenfallen können [440].

445. Sind $a\ b\ c$ drei in gerader Linie liegende Puncte der Hesse'schen Curve, so bilden ihre drei conjugirten Pole $a'\ b'\ c'$ ein Dreieck, dessen Seiten $b'c'$, $c'a'$, $a'b'$ resp. durch a, b, c hindurchgehen. (Fig. 34.)

Beweis. Sind aa', bb' conjugirte Polepaare, und $a\ b\ c$ in gerader Linie, so ist c ein Punct des durch die beiden ersten Paare bestimmten dritten Paares, und der conjugirte Pol c' von c der zweite Punct dieses Paares [441]. Mithin haben $a'\ b'\ c'$ die behauptete Eigenschaft [82]. (*Hesse.* Ueber Curven 3. O. Crelle's Journ. Bd. 36. pag. 147. *Cremona* art. 134.)

Fig. 34.



446. Zieht man aus einem Puncte c der Hesse'schen Curve (Fig. 34) Gerade nach zwei conjugirten Polen aa', so sind die Puncte bb', in welchen diese Geraden die Hesse'sche Curve noch treffen, ebenfalls conjugirte Pole, und die Geraden ab', $a'b$ schneiden sich in dem zu c conjugirten Pole c'. — Aus [445], da nach der Construction $a\ b\ c$ in gerader Linie liegen.

447. Aufgabe. Wenn die Hesse'sche Curve und auf ihr ein Paar conjugirter Pole aa' gegeben ist, zu einem beliebigen Puncte c dieser Curve den conjugirten Pol c' zu construiren.

Auflösung. (Fig. 34.) Man schneide die Hesse'sche Curve mit ac in b, und mit $a'c$ in b', so ist der gesuchte Punct c' der Schnitt der Geraden $a'b$, ab'. — Aus [446]. (*Hesse* l. c. [445] pag. 147. *Cremona* art. 134.)

448. Sind aa' zwei conjugirte Pole der Hesse'schen Curve, α ihr gemeinschaftlicher Tangentialpunct, und α' der dritte Schnittpunct der Geraden aa' mit der Curve, so sind $\alpha\alpha'$ conjugirte Pole. — (Fig. 34.) Denn fällt in [445] b mit a und daher auch b' mit a' zusammen, so werden die Geraden $a\ b\ c$, $b'\ a'\ c$ Tangenten an der Hesse'schen Curve in a und a'. Demnach geht c in den Tangentialpunct α über, und der conjugirte Pol c' von c in den dritten Schnittpunct α' der Geraden aa' mit der Curve. (*Cremona* art. 133.)

449. Da jeder Punct der Hesse'schen Curve nur einen ihm conjugirten Pol besitzt, so folgt auch umgekehrt: Ist α der Tangentialpunct von aa' und α' der conjugirte Pol zu α, so ist α' der Schnittpunct von aa' mit der Curve. Und: Ist α' dieser Schnittpunct, so ist sein conjugirter Pol α der Tangentialpunct von aa'.

450. Zieht man aus einem Puncte p der Hesse'schen Curve Strahlen nach den conjugirten Polepaaren dieser Curve, so sind diese Strahlen conjugirte Strahlenpaare einer Involution. (*Cremona* art. 134. a)

Beweis. Sind aa', bb' irgend zwei Paare conjugirter Pole, so sind sie zugleich correspondirende Punctepaare [442], und ist cc' ein drittes Polepaar, so sind sowohl aa', cc', als

auch bb', cc' correspondirende Punctepaare. Mithin folgt die Behauptung aus [427].

451. Durch jeden Punct p der Hesse'schen Curve kann man zwei und nur zwei Gerade legen, von denen jede die Curve in zwei conjugirten Polen trifft, und zwar bilden diese Geraden die Doppelstrahlen der von p ausgehenden Involution. — Denn die von p nach den Polepaaren gehende Strahleninvolution [450] besitzt zwei Doppelstrahlen [64]. Jeder derselben aber muss zwei conjugirte Pole enthalten, da die letzteren niemals zusammenfallen [440].

452. Bilden $aa'\,bb'$ ein Punctquadrupel der Hesse'schen Curve mit dem Tangentialpunct p', und sind aa', bb' conjugirte Polepaare [444], so treffen sich die Geraden aa' und bb' in einem Puncte p der Hesse'schen Curve, welcher der zu p' conjugirte Pol ist. Die Geraden paa', pbb' sind die Doppelstrahlen der Involution, deren Scheitel in p liegt.

Beweis. Versteht man unter p zunächst den Durchschnitt der Geraden aa' mit der Curve, so ist p nach [448] der conjugirte Pol zu p'. Aber p' ist auch der Tangentialpunct von bb', also trifft die Gerade bb' die Curve ebenfalls in p [449].

453. Schneiden sich die Verbindungslinien aa' und bb' zweier Polepaare der Hesse'schen Curve in einem Puncte p dieser Curve, so bilden die vier Puncte $aa'bb'$ ein Quadrupel, dessen gemeinschaftlicher Tangentialpunct der zu p conjugirte Pol p' ist. — Denn nach [449] ist dann p' sowohl Tangentialpunct zu aa', als auch zu bb'.

454. Sind $a\,b\,c\,d\,e\,f$ sechs Puncte der Hesse'schen Curve, welche zugleich auf einem Kegelschnitte liegen, so liegen zwei von ihnen, z. B. $e\,f$, mit den conjugirten Polen $a'\,b'\,c'\,d'$ der vier übrigen in einem zweiten Kegelschnitt.

Beweis. Da die Strahlen von irgend einem Puncte der Hesse'schen Curve, z. B. von e, nach den conjugirten Polen derselben in Involution sind, so ist [67]

$$e\,(a\,b\,c\,d)\ \overline{\wedge}\ e\,(a'\,b'\,c'\,d')$$

und ebenso

$$f\,(a\,b\,c\,d)\ \overline{\wedge}\ f\,(a'\,b'\,c'\,d').$$

Da aber $e\,f$ mit $a\,b\,c\,d$ in einem Kegelschnitte liegen, so ist auch [86]

$$e(a\,b\,c\,d)\ \overline{\wedge}\ f(a\,b\,c\,d)$$

und folglich

$$e(a'\,b'\,c'\,d')\ \overline{\wedge}\ f(a'\,b'\,c'\,d'),$$

mithin liegen auch $e\,f\,a'\,b'\,c'\,d'$ in einem Kegelschnitte [85].

455. Sind $a\,b\,c\,d$ vier beliebige Puncte der Hesse'schen Curve, $a'\,b'\,c'\,d'$ ihre conjugirten Pole, so haben diese zwei Gruppen von vier Puncten den nämlichen gegenüberliegenden Punct.

Beweis. Legt man durch $a\,b\,c\,d$ einen beliebigen Kegelschnitt, welcher die Curve in $e\,f$ trifft, so ist der gegenüberliegende Punct m derjenige, in welchem die Gerade $e\,f$ die Curve trifft [239]. Nun liegen aber $a'\,b'\,c'\,d'\,e\,f$ ebenfalls in einem Kegelschnitt [454], also ist m auch der gegenüberliegende Punct zu $a'\,b'\,c'\,d'$.

456. Liegen sechs Puncte $a\,b\,c\,d\,e\,f$ der Hesse'schen Curve auf einem Kegelschnitte, so liegen ihre conjugirten Pole $a'\,b'\,c'\,d'\,e'\,f'$ auf einem zweiten Kegelschnitte. (*Cremona* art. 137. a)

Beweis. Die zwei Mal vier Puncte $abcd$ und $a'b'c'd'$ haben denselben gegenüberliegenden Punct m [455], es liegen also $m\,e\,f$ in einer Geraden. Zieht man nun $m\,e'$ und schneidet damit die Curve in f', so liegen $a'\,b'\,c'\,d'\,e'\,f'$ in einem Kegelschnitt. Ist aber e' der conjugirte Pol zu e, so muss auch f' der conjugirte Pol zu f sein [446].

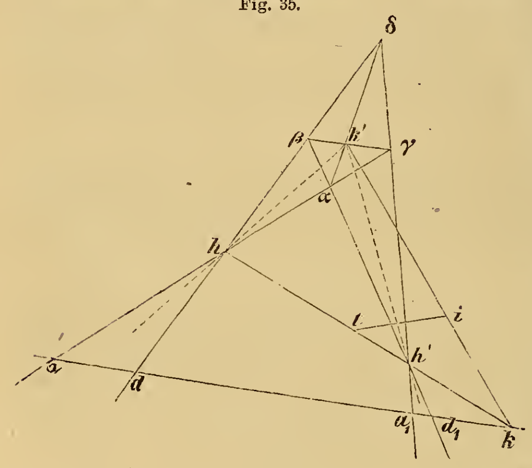
457. Sind $a\,b\,c\,d$ vier beliebige Puncte der Hesse'schen Curve, $a'\,b'\,c'\,d'$ ihre conjugirten Pole, so ist der neunte Durchschnittspunct aller Curven 3. O., welche durch diese acht Puncte gehen, der Tangentialpunct zu dem den Puncten $a\,b\,c\,d$ und $a'\,b'\,c'\,d'$ gemeinschaftlich gegenüberliegenden Puncte m. — Aus [263], da in diesem Falle wegen [455] m und μ zusammenfallen.

§. 4.

458. (Fig. 35.) Ist $h h' k$ eine Gerade, welche zwei conjugirte Pole $h h'$ der Hesse'schen Curve $H(u) = 0$ verbindet und diese Curve ausserdem in k schneidet; und sind ferner $\alpha\, \beta\, \gamma\, \delta$ die Durchschnitte der conischen Polaren von h und h' bezüglich der Fundamentalcurve 3. O. $u = 0$, so zwar, dass [438] h' $(\alpha\, \beta, \gamma\, \delta)$ die conische Polare von h, und h $(\alpha\, \gamma, \beta\, \delta)$ die conische Polare von h' ist, so bilden die Geraden $\alpha\, \delta$, $\beta\, \gamma$ die conische Polare von k, ihr Durchschnitt k' ist daher [438] der conjugirte Pol zu k, und dann zugleich wegen [449] der Tangentialpunct von h und h'.

Beweis. Die conischen Polaren aller Puncte einer Geraden schneiden sich in denselben vier Puncten [284], also geht die conische Polare von k durch $\alpha \beta \gamma \delta$. Da aber k auf der Hesse'schen Curve liegt, so besteht seine conische Polare aus einem der drei durch diese vier Puncte gehenden Geradenpaare. Zwei der letzteren, nämlich $\alpha\, \beta$, $\gamma\, \delta$ und $\alpha\, \gamma$, $\beta\, \delta$ sind die conischen Polaren von h und h'; da nun zwei verschiedene Puncte auch stets verschiedene conische Polaren haben [267], [282], so muss die conische Polare von k das dritte Geradenpaar $\alpha\, \delta$, $\beta\, \gamma$ sein. (*Salmon* pag. 155. *Cremona* art. 133.)

Fig. 35.



459. Die gerade Polare eines Punctes h der Hesse'schen Curve bezüglich der Fundamentalcurve ist eine Tangente an der Hesse'schen Curve, und zwar diejenige, welche diese in dem zu h conjugirten Pole h' berührt, und umgekehrt: Eine Tangente der Hesse'schen Curve in h' ist die gerade Polare

(bezüglich der Fundamentalcurve) des zu h' conjugirten Pols h.

Beweis. (Fig. 35.) Die gerade Polare eines Punctes h bezüglich der Fundamentalcurve ist zugleich die Polare von h bezüglich der conischen Polare von h [274]. Da nun hier diese conische Polare von den Geraden h' ($\alpha\,\beta$, $\gamma\,\delta$) gebildet wird, so ist wegen des vollständigen Vierseits $\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta\,h\,h'$ jene gerade Polare die Gerade $h'k'$ [95], und diese berührt die Hesse'sche Curve in h', weil k' der Tangentialpunct von h' ist [458]. Ebenso ist die Tangente hk' an der Hesse'schen Curve in h die gerade Polare von h'. (*Salmon* pag. 155. *Cremona* art. 132. c)

460. Hieraus folgt: Beschreibt ein Punct h die Hesse'sche Curve, so hüllt dessen gerade Polare (bezüglich der Fundamentalcurve) die Hesse'sche Curve ein. (*Salmon* pag. 155. *Cremona* art. 132. c)

461. Die conische Polare (bez. d. Fund. Curve) irgend eines Punctes c schneidet die Hesse'sche Curve in sechs Puncten h. Die geraden Polaren (bez. d. Fund. Curve) dieser sechs Puncte h sind die von c an die Hesse'sche Curve gehenden Tangenten, und deren Berührungspuncte die conjugirten Pole jener sechs Puncte h.

Beweis. Da die conische Polare von c durch h geht, so geht die gerade Polare von h durch c [273]. Da aber h auf der Hesse'schen Curve liegt, so ist die gerade Polare von h Tangente an der Hesse'schen Curve in dem zu h conjugirten Pole [459]. (*Cremona* art. 132. c.)

Anmerkung. Dieser Satz lässt sich im Zusammenhang mit [270] auch so aussprechen: Die Berührungspuncte der von einem Puncte c an die Fund. Curve gehenden Tangenten sind die Durchschnitte derselben mit der conischen Polare von c; die Berührungspuncte aber der von c an die Hesse'sche Curve gehenden Tangenten sind die conjugirten Pole der Durchschnitte der Hesse'schen Curve mit der nämlichen conischen Polare von c.

462. Ein Wendepunct w der Fund. Curve ist zugleich ein Punct der Hesse'schen Curve [339]. Der ihm als solchen conjugirte Pol w' ist der Durchschnitt der Wendetangente

und der harmonischen Polare von w (die erstere bezüglich der Fund. Curve). — Wegen [438], denn diese beiden Geraden bilden die conische Polare von w [280] (*Cremona* art. 141.)

463. Die Wendetangente an der Fund. Curve in einem Wendepuncte w berührt die Hesse'sche Curve in dem zu w (als Punct der Hesse'schen Curve betrachtet) conjugirten Pole w'. — Aus [459], da die Wendetangente die gerade Polare von w ist [269]. (*Clebsch.* Ueber die Wendetangenten der Curven 3. O. Crelle's Journ. Bd. 58. pag. 232. — *Cremona.* art. 141.) — Folgt auch aus [341] in Verbindung mit [356], da w' auf der harmonischen Polare von w liegt [462].

Anmerkung. Eine Gerade, welche zwei conjugirte Pole $h\,h'$ der Hesse'schen Curve verbindet, schneidet diese Curve im Allgemeinen noch in einem dritten Puncte k. Ist aber h ein Wendepunct, so fällt k mit h' zusammen.

464. Eine Curve 3. O. und ihre Hesse'sche Curve haben 27 gemeinschaftliche Tangenten, von denen neun die Wendetangenten der Fund. Curve sind; also ausser den letzteren noch 18.

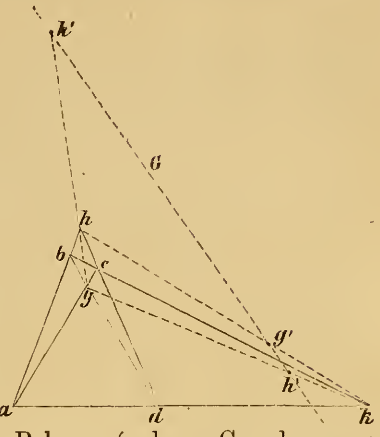
Beweis. Da beide Curven von der sechsten Classe sind, so haben sie $6 . 6 = 36$ gemeinschaftliche Tangenten. [187. Note.] Unter diesen befinden sich nach [463] die Wendetangenten der Fund. Curve. Da aber jede von diesen als aus zwei zusammenfallenden Tangenten bestehend zu betrachten ist [187. Note], so sind ausser ihnen nur noch 18 gemeinschaftliche Tangenten vorhanden. (*Cremona.* art. 141. a)

§. 5.

465. (Fig. 36.) Jede Gerade G hat bezüglich einer Curve 3. O. als Fund. Curve vier Pole $a\ b\ c\ d$, in welchen sich die conischen Polaren aller ihrer Puncte schneiden [285]. Sind nun $g'\ h'\ k'$ die Puncte, in welchen die Gerade G die Hesse'sche Curve trifft, so sind die conischen Polaren von g', h', k' die drei Geradenpaare, welche durch $a\ b\ c\ d$ hindurch gehen: (ac, bd); (ab, cd); (ad, bc) [268], und deren Durchschnitte, oder die Diagonalpuncte g, h, k des vollständigen Vierecks $a\ b\ c\ d$ sind die conjugirten Pole zu resp. g', h', k' [438]. Die letzteren liegen der Reihe nach auf den Geraden hk, kg, gh

[445]. Die Puncte g, h, k aber liegen als conjugirte Pole zu den drei Puncten g', h', k' der Hesse'schen Curve ebenfalls auf dieser Curve [438]. Hieraus folgt: Nimmt eine Gerade G nach und nach alle Lagen in der Ebene an, so beschreiben die Diagonalpuncte g, h, k des von den vier Polen $a\ b\ c\ d$ der Geraden G (bezüglich einer Curve 3. O. u) gebildeten vollständigen Vierecks die Hesse'sche Curve $H(u)$; und die Seitenpaare dieses vollständigen Vierecks bilden die conischen Polaren (polaren Geradenpaare [268]) der Puncte der Hesse'schen Curve. (*Cremona* art. 133. d.)

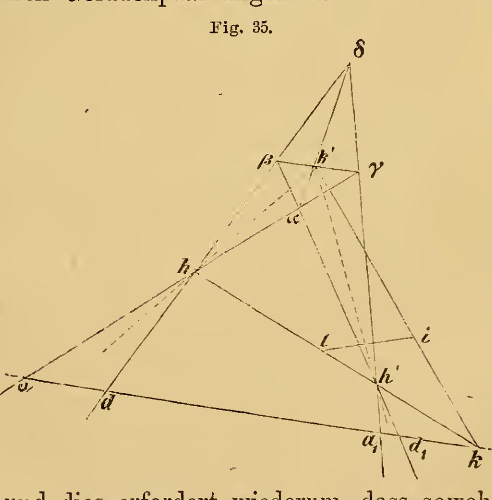
Fig. 36.



Anmerkung. Da jeder Punct als ein Pol einer Geraden G betrachtet werden kann, dem dann noch drei andere Pole beigeordnet sind, so tritt jeder Punct der Ebene als eine Ecke eines solchen vollständigen Vierecks auf, und daher gehen durch jeden Punct drei Gerade hindurch, von denen jede einem polaren Geradenpaar angehört.

466. (Fig. 36, 35.) Wird die Gerade G eine Tangente an der Hesse'schen Curve, sodass zwei ihrer Durchschnitte mit derselben zusammenfallen, z. B. g' mit h', so fallen auch die Diagonalseiten hk und kg, auf denen g' und h' liegen, zusammen, und dies erfordert wiederum, dass sowohl

Fig. 35.



die Diagonalpuncte g, h, als auch die Ecken b, c des vollständigen Vierecks $a\,b\,c\,d$ in denselben Punct zusammenfallen, der als conjugirter Pol von h' mit h bezeichnet werde. Umgekehrt: Fallen zwei Pole b, c der Geraden G zusammen, so fallen auch g und h in den nämlichenPunct, also alle vier Puncte in einen h, und daher fallen auch g', h' in einen h' zusammen, in welchem dann G die Hesse'sche Curve berührt. Dadurch wird nun k' der Tangentialpunct von h' (und auch von h [443]), ferner h (a, d) die conische Polare von h', und k $(h\,h', a\,d)$ die conische Polare von k'. Da endlich die conischen Polaren der Puncte von G alle durch b, c hindurchgehen, die Gerade $b\,c\,k$ sich nun aber in $h\,h'\,k$ verwandelt hat, so haben die conischen Polaren aller Puncte von G die Gerade $h\,h'$ zur gemeinschaftlichen Tangente in h. (*Cremona* art. 135.)

Fig. 35.

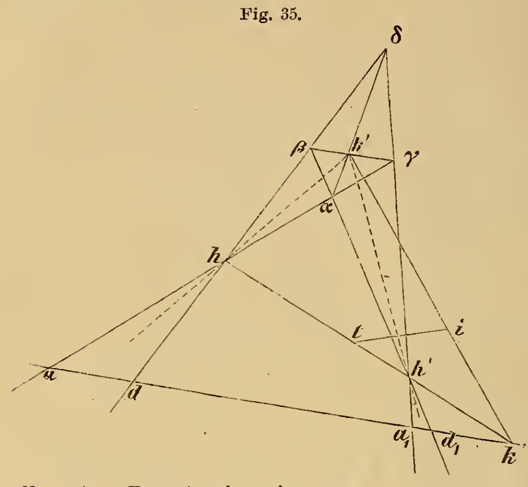
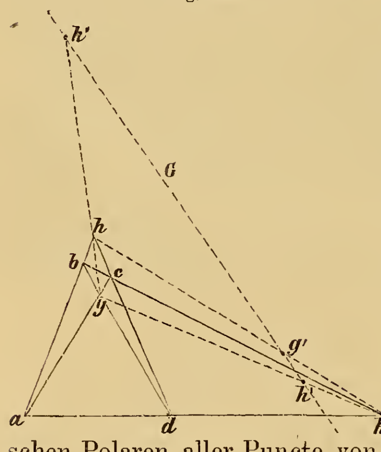


Fig. 36.



467. Aus dieser Betrachtung ergeben sich folgende Sätze: Wenn von den vier Polen einer Geraden G zwei in einen Punct h zusammenfallen, so dass die conischen Polaren aller Puncte von G in h eine gemeinschaftliche Tangente haben, so liegt dieser Punct auf der Hesse'schen Curve, die Gerade G aber berührt die Hesse'sche Curve in dem zu h

conjugirten Pole h', und die Gerade hh' ist die gemeinschaftliche Tangente jener conischen Polaren.

468. Ferner: Berührt eine Gerade G die Hesse'sche Curve in einem Puncte h', so fallen zwei ihrer Pole bezüglich der Fundamentalcurve zusammen (bilden einen Doppelpol) in einen Punct h, der auf der Hesse'schen Curve liegt und der zu h' conjugirte Pol ist.

469. Ferner: (Fig. 35.) Ist $k'h'$ eine Tangente an der Hesse'schen Curve, und zwar h' Berührungspunct, k' Tangentialpunct, so besteht die conische Polare von h' aus den Geraden $h\,(a, d)$, welche den Doppelpol h der Geraden $k'h'$ (bez. d. Fund. Curve) (d. i. den zu h' conjugirten Pol) mit den beiden einfachen Polen a, d derselben verbindet. Die conische Polare des Tangentialpunctes k' aber besteht aus den beiden Geraden hh' und ad, von denen die erstere den Berührungspunct h' mit seinem conjugirten Pole h verbindet, und die letztere die beiden einfachen Pole der Tangente $k'h'$ verbindet. Dieses Geradenpaar schneidet sich in dem zu k' conjugirten Pole k, welcher zugleich der Punct ist, in welchem hh' die Hesse'sche Curve zum dritten Male trifft. (S. auch [449]) (*Cremona* art. 133. b.)

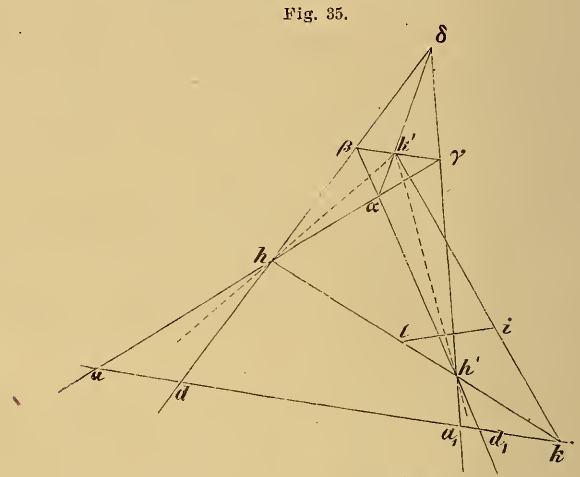
470. Hieraus folgt: Die Gerade, welche zwei conjugirte Pole hh' der Hesse'schen Curve verbindet, gehört mit zu den Geraden, welche die conischen Polaren der Puncte der Hesse'schen Curve zusammensetzen.

471. Wenn eine zwei conjugirte Pole hh' verbindende Gerade die Hesse'sche Curve in einem dieser Puncte, z. B. in h', berührt, so ist der andere h ein Wendepunct, und hh' Wendetangente an der Fundamentalcurve. — Denn in diesem Falle fällt der dritte Durchschnitt k der Geraden hh' mit der Curve mit h' zusammen, und daher auch der Tangentialpunct k' von h' (nämlich der conjugirte Pol zu k [449]) auf h. Mithin ist dann hk' Wendetangente an der Hesse'schen Curve und h Wendepunct für diese und daher auch für die Fundamentalcurve. Dann aber ist nach [463] hh' Wendetangente an der Fundamentalcurve.

472. Sind hh' zwei conjugirte Pole der Hesse'schen Curve, k' ihr gemeinschaftlicher Tangentialpunct, sind ausserdem

$h\,h\,a\,d$ die Pole der Tangente $k'h'$, und $h'h'a_1\,d_1$ die Pole der Tangente $k'\,h$, so liegen die vier Puncte $a\,d\,a_1\,d_1$ auf derselben Geraden, nämlich auf derjenigen, welche mit hh' zusammen die conische Polare von k' bildet. — Denn behält man in [469] den Tangentialpunct k' bei, nimmt aber statt der Tangente $k'h'$ die andere $k'h$, so muss die conische Polare von k' bestehen aus hh' und der Geraden, welche die einfachen Pole $a_1\,d_1$ der Tangente $k'h$ verbindet; diese zweite Gerade aber war schon $a\,d$. Die Geraden $h'(a_1, d_1)$ bilden natürlich die conische Polare von h [469].

Fig. 35.



473. Nach [465] gehen durch jeden Punct h der Ebene drei Gerade hindurch, welche conischen Polaren angehören. Liegt aber h auf der Hesse'schen Curve, so gehören zwei dieser Geraden, nämlich $h\,a$ und $h\,d$ derselben conischen Polare an und zwar derjenigen des zu h conjugirten Pols h', und die dritte geht durch diesen conjugirten Pol hindurch [466].

474. Die Tangente hk' in einem Puncte h der Hesse'schen Curve ist harmonisch zugeordnet zu der Geraden hh', die nach dem zu h conjugirten Pole h' geht, in Beziehung auf das Geradenpaar $h\,(a, d)$, welches die conische Polare von h' bildet und nach den beiden einfachen Polen a, d der Tangente $h'k'$ in h' an der Hesse'schen Curve geht. — Denn hk' ist die Polare von h' in Bezug auf die conische Polare von h' [459]. (*Cremona* art. 133.)

475. Ist h ein Wendepunct der Hesse'schen Curve (und daher auch der Fund. Curve [355]), geht also die Tangente hk' in die Wendetangente an der Hesse'schen Curve in h über, so fallen drei Pole dieser Geraden (bezüglich der Fund. Curve) in den zu h conjugirten Pol h', und der vierte liegt auf der harmonischen Polare von h, welche nach [356] der Fund. Curve und der Hesse'schen Curve gemeinschaftlich ist.

Beweis. In diesem Falle fällt zuerst der Tangentialpunct k' mit h zusammen, sodann nach [463] auch k mit h'. Die conische Polare h' $(a_1\, d_1)$ des Wendepunctes h aber besteht aus der Wendetangente an der Fund. Curve und der harmonischen Polare [280]; und die erstere ist die Gerade hh' [463], also fällt von den beiden Geraden h' (a_1, d_1) die eine, etwa $h'\,d_1$ mit hh' zusammen, und die andere $h'\,a_1$ ist die harmonische Polare von h, demnach fallen die drei Puncte $d_1 k h'$ in einen zusammen; d. h. es fällt in den Doppelpol h' der Geraden hk' (der Wendetangente an der Hesse'schen Curve) auch noch der einfache Pol d_1; der vierte Pol a_1 aber liegt auf der harmonischen Polare von h.

476. Alle conischen Polaren (bez. der Fund. Curve), welche durch den conjugirten Pol h' eines Wendepunctes h der Hesse'schen Curve gehen, haben in h' miteinander eine dreipunctige Berührung. — Denn diese conischen Polaren bilden einen Kegelschnittbüschel, dessen Basispuncte die vier Pole der geraden Polare von h' sind [288]. Die letztere aber ist die Wendetangente in h an der Hesse'schen Curve [459] und daher fallen drei Basispuncte des Büschels in h' zusammen [475].

477. Bilden zwei Gerade C, C' eine conische Polare eines Punctes k' der Hesse'schen Curve, sodass ihr Durchschnittspunct k auf der Hesse'schen Curve liegt und der zu k' conjugirte Pol ist [438], so trifft jede dieser Geraden die Hesse'sche Curve in zwei conjugirten Polen.

Beweis. Ist C irgend eine der beiden Geraden, und h ein von k verschiedener Durchschnittspunct derselben mit der Hesse'schen Curve, so gehen durch h drei Gerade hindurch, welche conischen Polaren angehören, von denen nach [473] eine durch den zu h conjugirten Pol h' geht, und die beiden

anderen die conische Polare von h' bilden. Eine dieser drei Geraden ist offenbar C selbst, aber diese gehört nicht zu dem in h sich treffenden polaren Geradenpaare, also muss sie diejenige sein, die durch den zu h conjugirten Pol geht.

Bemerkung. Hieraus folgt: Durchläuft ein Punct k die Hesse'sche Curve, so erzeugt das in k sich treffende polare Geradenpaar durch seine Durchschnitte mit der Hesse'schen Curve die conjugirten Pole der letzteren.

478. Ein polares Geradenpaar C, C' mit dem Durchschnitt k fällt zusammen mit den Doppelstrahlen der Involution, deren Scheitel in k liegt, und deren Strahlen nach den conjugirten Polen der Hesse'schen Curve gehen [450]. — Aus [451], denn die Geraden C, C' treffen jede die Hesse'sche Curve in zwei conjugirten Polen [477].

479. Liegen zwei conjugirte Polepaare hh' und ll' so, dass ihre Verbindungslinien sich in einem Puncte k der Curve schneiden, so bilden diese Geraden ein polares Geradenpaar. — Denn nach [451] gehen durch k nur zwei Gerade, welche die Hesse'sche Curve in conjugirten Polepaaren schneiden, und diese sind die Doppelstrahlen der von k ausgehenden Involution, mithin nach [478] auch ein polares Geradenpaar.

480. Die vier Puncte $hh'll'$, in denen ein polares Geradenpaar mit dem Durchschnitte k die Hesse'sche Curve trifft, bilden ein Quadrupel, d. h. sie haben einen gemeinschaftlichen Tangentialpunct k', der der conjugirte Pol zu k ist. — Aus [453], denn hh' und ll' sind nach [477] zwei Paare conjugirter Pole, deren Verbindungslinien sich in dem Puncte k schneiden, welcher auf der Hesse'schen Curve liegt.

481. Bilden zwei Paare conjugirter Pole hh' und ll' ein Punctquadrupel, so bilden die Geraden hh' und ll' eine conische Polare (ein polares Geradenpaar). — Aus [479], denn der Durchschnitt der Geraden hh' und ll' liegt auf der Hesse'schen Curve [452].

482. Wenn von den zwei Geraden eines polaren Geradenpaars mit dem auf der Hesse'schen Curve liegenden Durchschnittspuncte h', die eine die Hesse'sche Curve in h' berührt, so ist sie die Wendetangente an der Fundamentalcurve in dem zu h' conjugirten Pole h, und die andere ist

die harmonische Polare des Wendepunctes h. — Denn da in h' nicht zwei conjugirte Pole zusammenfallen können [440], so schneidet die erstere Gerade die Hesse'sche Curve in dem zu h' conjugirten Pole h [477] und daher folgt die Behauptung aus [471].

§. 6.

483. Jede Curve 3. O. $v = 0$ kann als eine Hesse'sche Curve $H(u) = 0$ angesehen werden, und zwar giebt es drei Curven 3. O. $u = 0$, für welche als Fundamentalcurven die gegebene Curve $v = 0$ die Hesse'sche ist. (*Hesse.* Zur Theorie der Elimination. Crelle's Journ. Bd. 39. pag. 89.)

Beweis 1. Man kann die Curve v gegeben denken durch ein Punctquadrupel $hh'll'$ und den zugehörigen Tangentialpunct k' [404]. Dann liegen die drei Durchschnitte der drei durch $hh'll'$ gehenden Geradenpaare ebenfalls auf der Curve v [409]. Ist nun z. B. k der Durchschnitt der Geraden hh' und ll', und betrachtet man diese als die conische Polare des Punctes k' in Beziehung auf eine Curve 3. O. u, so ist v die Hesse'sche Curve der letzteren und hh', ll', kk' conjugirte Polepaare auf derselben [481]. Da es aber drei Geradenpaare durch die vier Puncte des Quadrupels giebt, so kann jedes Paar als conische Polare des nämlichen Punctes k' in Beziehung auf eine Fund. Curve u betrachtet werden, und dann müssen diese drei Fundamentalcurven im Allgemeinen von einander verschieden sein, da einem Puncte in Beziehung auf eine Curve 3. O. nur eine einzige conische Polare zugehört [267].

Beweis 2. Nimmt man von den zwölf Geraden, welche durch die neun Wendepuncte einer Curve 3. O. gehen [353], drei, die alle neun enthalten, als Seiten des Fundamentaldreieckes $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ an, so kann nach [354] die Gleichung der Curve in folgender Form geschrieben werden

(1) $u = \lambda' (x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) + 6 \lambda x_1 x_2 x_3 = 0,$

(indem an Stelle des Coefficienten k in der Gleichung (1) in [354] hier $-2 \frac{\lambda}{\lambda'}$ gesetzt ist) und stellt bei veränderlichem

$\frac{\lambda}{\lambda'}$, alle Curven des syzygetischen Büschels [355] dar, welche durch die neun Wendepuncte hindurchgehen. Man erhält hieraus:

$$\begin{aligned} u_{11} &= 6\lambda' x_1 & u_{23} &= 6\lambda x_1 \\ u_{22} &= 6\lambda' x_2 & u_{31} &= 6\lambda x_2 \\ u_{33} &= 6\lambda' x_3 & u_{12} &= 6\lambda x_3 \end{aligned}$$

und dann die Gleichung der Hesse'schen Curve mit Weglassung des Coefficienten 6^3.

$$H(u) = \begin{vmatrix} \lambda' x_1, & \lambda x_3, & \lambda x_2 \\ \lambda x_3, & \lambda' x_2, & \lambda x_1 \\ \lambda x_2, & \lambda x_1, & \lambda' x_3 \end{vmatrix} = 0,$$

oder entwickelt

$$H(u) = -\lambda^2 \lambda' (x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) + (2\lambda^3 + \lambda'^3) x_1 x_2 x_3 = 0,$$

und wenn man

(2) $$2\lambda^3 + \lambda'^3 : -\lambda^2\lambda' = 6\mu : \mu'$$

setzt,

(3) $$H(u) = \mu' (x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) + 6\mu\, x_1 x_2 x_3 = 0.$$

Die Hesse'sche Curve erhält also eine Gleichung von derselben Gestalt wie die Fundamentalcurve, was sich erwarten liess, da die Hesse'sche Curve selbst eine der Curven des durch die Gleichung (1) dargestellten syzygetischen Büschels ist [355]. Demnach kann eine Curve 3. O. auch stets als eine Hesse'sche Curve (3) betrachtet werden, und wenn man nun diese, also $\mu : \mu'$, als gegeben ansieht, so findet man die ihr zugehörige Fundamentalcurve, wenn man $\lambda : \lambda'$ aus der Gleichung (2), die sich schreiben lässt

(4) $$6\lambda^2\lambda'\mu + (2\lambda^3 + \lambda'^3)\mu' = 0$$

bestimmt. Diese liefert aber drei Werthe für das Verhältniss $\lambda : \lambda'$, und daher giebt es drei Fundamentalcurven, welchen eine gegebene Curve 3. O. als Hesse'sche Curve angehört.

Man kann mit Hülfe der Gleichung (4) entscheiden, ob und wann zwei der Fundamentalcurven zusammenfallen können, da dies dann und nur dann eintritt, wenn in jener cubischen Gleichung zwei Wurzeln einander gleich werden. Betrachtet man nämlich in dieser Gleichung $\frac{\lambda'}{\lambda}$ als die Unbekannte, indem man sie in der Form

$$\left(\frac{\lambda'}{\lambda}\right)^3 + 6\,\frac{\mu}{\mu'}.\frac{\lambda'}{\lambda} + 2 = 0$$

schreibt, so kann man sie sehr leicht nach der Cardanischen Formel auflösen. Setzt man der Kürze wegen

$$p = \sqrt[3]{-1 + \sqrt{1 + \left(\frac{2\mu}{\mu'}\right)^3}}, \quad q = \sqrt[3]{-1 - \sqrt{1 + \left(\frac{2\mu}{\mu'}\right)^3}}$$

und unterwirft diese beiden Wurzelwerthe der Bedingung

(5) $$pq = -\frac{2\mu}{\mu'},$$

bezeichnet ferner mit α, α^2 die imaginären Cubikwurzeln der Einheit, so erhält man für $\frac{\lambda'}{\lambda}$ die drei Werthe

$$\frac{\lambda'}{\lambda} = p + q, = \alpha p + \alpha^2 q, = \alpha^2 p + \alpha q,$$

von welchen zwei einander gleich sind, wenn $p = q$ ist. Dies tritt nun zuerst für $\mu' = 0$ ein, indem p und q beide unendlich gross werden. In der That liefert dann die Gleichung (4)

$$\lambda^2 \lambda' = 0,$$

sodass $\lambda' = 0$ die einfache und $\lambda = 0$ die zweifache Wurzel ist. Der Hesse'schen Curve $x_1 x_2 x_3 = 0$ gehört also $x_1 x_2 x_3 = 0$ einmal und $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 0$ zweimal als Fundamentalcurve an. Ausserdem wird $p = q$, wenn

$$\left(\frac{2\mu}{\mu'}\right)^3 = -1$$

also

$$-\frac{2\mu}{\mu'} = 1, = \alpha, = \alpha^2$$

ist. Dieses aber sind drei Werthe, für welche der linke Theil der Gleichung (3) in drei lineare Factoren zerfällt, (S. die Formeln (4) in [354]), für welche also die Hesse'sche Curve aus drei Geraden besteht. Ist dann $-\frac{2\mu}{\mu'} = 1$, so wird $p = q = -1$ und daher, da $\alpha + \alpha^2 = -1$ ist,

$$\frac{\lambda'}{\lambda} = -2, = +1, = +1$$

oder

$$-\frac{2\lambda}{\lambda'} = 1, = -2, = -2.$$

Für $-\frac{2\mu}{\mu'} = \alpha$ ist ferner wegen (5) $p = q = -\alpha^2$ und

damit

$$\frac{\lambda'}{\lambda} = -2\alpha^2, = + \alpha^2, = + \alpha^2; \quad -\frac{2\lambda}{\lambda'} = \alpha, = -2\alpha, = -2\alpha.$$

Endlich für $-\frac{2\mu}{\mu'} = \alpha^2$ hat man $p = q = -\alpha$ und

$$\frac{\lambda'}{\lambda} = -2\alpha, = + \alpha, = + \alpha, \quad -\frac{2\lambda}{\lambda'} = \alpha^2, = -2\alpha^2, = -2\alpha^2.$$

In allen diesen Fällen besteht daher die von der einfachen Wurzel herrührende Fundamental-Curve aus den nämlichen drei Geraden, wie die Hesse'sche Curve (vgl. [340]); und ausserdem giebt es jedesmal noch eine zweite, von der zweifachen Wurzel herrührende Fundamentalcurve, welche ebenfalls die drei Geraden zur Hesse'schen Curve hat. Die Gleichungen dieser Curven sind folgende:

Hesse'sche Curve.

$$x_1 x_2 x_3 = 0$$
$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 3 x_1 x_2 x_3 = 0$$
$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 3 \alpha x_1 x_2 x_3 = 0$$
$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 3 \alpha^2 x_1 x_2 x_3 = 0$$

Fundamentalcurven:

einfache Wurzel.	zweifache Wurzel.
$x_1 x_2 x_3 = 0$	$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 0$
$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 3 x_1 x_2 x_3 = 0$	$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 6 x_1 x_2 x_3 = 0$
$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 3\alpha x_1 x_2 x_3 = 0$	$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 6\alpha x_1 x_2 x_3 = 0$
$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 3\alpha^2 x_1 x_2 x_3 = 0$	$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 6\alpha^2 x_1 x_2 x_3 = 0.$

Die Vergleichung mit [354] zeigt, dass diese vier aus je drei Geraden bestehenden Hesse'schen Curven die vier Gruppen von je drei Geraden sind, auf welchen die Wendepuncte vertheilt liegen.

Es ergiebt sich daher, dass im Allgemeinen zu einer Hesse'schen Curve stets drei verschiedene Fundamentalcurven gehören; wenn aber die Hesse'sche Curve aus drei Geraden besteht, so fallen zwei der Fundamentalcurven zusammen, und die dritte ist mit der Hesse'schen Curve identisch.

Beweis 3. S. [622].

484. Aus [483. Bew. 1] folgt: Die drei Geradenpaare, welche durch die Puncte eines Quadrupels einer Curve 3. O. $v = 0$ gehen, sind die conischen Polaren des Tangential-

punctes in Beziehung auf die drei Curven $u = 0$, welche als Fundamentalcurven zu v als einer Hesse'schen Curve gehören. (*Cremona* art. 147, a.)

485. Zwei Puncte einer Curve 3. O. $u = 0$, welche, sobald man diese Curve als eine Hesse'sche betrachtet, auf der letzteren conjugirte Pole sind, sollen conjugirte Pole der Curve u genannt werden. Sind $a_1\, a_2\, a_3\, a_4$ die vier Puncte eines Quadrupels, so lassen sich dieselben auf dreifache Weise zu conjugirten Polepaaren anordnen, nämlich

$$a_1\, a_2,\; a_3\, a_4;\; a_1\, a_3,\; a_2\, a_4;\; a_1\, a_4,\; a_2\, a_3;$$

denn da die gegebene Curve auf dreifache Weise als Hesse'sche Curve betrachtet werden kann, nämlich als zu drei verschiedenen Fund. Curven gehörig, so gehört demselben Puncte a_1, je nachdem man eine dieser drei Fund. Curven wählt, a_2 oder a_3 oder a_4 als conjugirter Pol zu, und die beiden übrigen Puncte sind dann ebenfalls conjugirte Pole [444]. Demnach giebt es auf einer Curve 3. O. drei verschiedene Systeme conjugirter Polepaare, und die drei Puncte $a_2\, a_3\, a_4$, welche in diesen drei Systemen zu a_1 als conjugirte Pole gehören, bilden mit a_1 ein Punctquadrupel. Alle von den conjugirten Polen einer Hesse'schen Curve geltenden Sätze gelten daher ohne Weiteres auch von den conjugirten Polen desselben Systemes einer beliebigen Curve 3. O., so bald diese als Hesse'sche Curve betrachtet wird. Ausserdem ergiebt sich hieraus, dass zwei Puncte einer Curve 3. O., die denselben Tangentialpunct haben (correspondirende Puncte sind), auch stets als conjugirte Pole in einem der drei Systeme betrachtet werden können.

486. Aufgabe. Eine Curve 3. O. zu construiren, wenn dieselbe durch ein Punctquadrupel und den zugehörigen Tangentialpunct gegeben ist [404].

Auflösung. Man betrachte die zu construirende Curve als eine Hesse'sche Curve und ordne die Puncte des Quadrupels in beliebiger Weise paarweise einander als conjugirte Polepaare zu. Sind dann $a a'$, $b b'$ diese beiden Paare und p der Tangentialpunct, so ist der Durchschnittspunct $p' = (a a', b b')$ der zu p conjugirte Pol [452]. Wenn man nun immer zu je zwei conjugirten Polepaaren das dritte Punctepaar nach [82]

bestimmt, erhält man neue Punctepaare der gesuchten Curve, welche dann auch stets conjugirte Polepaare sind [441]. Indem man also von den gegebenen Puncten aa', bb', p ausgeht, bestimmt man zuerst $p' = (aa', bb')$, sodann liefern je zwei Paare ein neues Paar in folgender Art:

aa', bb'	liefern	cc'	dd', bb'	liefern	ff'
cc', pp'	„	dd'	ee', bb'	„	hh'
dd', aa'	„	ee'	ee', cc'	„	ii'

u. s. f.

Bemerkung. Da bei dieser Construction auch Gerade zu ziehen sind, welche einen Curvenpunct mit den Puncten eines Quadrupels verbinden, so erhält man nach [382] auch immer neue Punctquadrupel, deren Tangentialpuncte nach [487] oder [412] ebenfalls gefunden werden können.

487. Aufgabe. Wenn eine Curve 3. O. durch ein Punctquadrupel $aa'bb'$ und den zugehörigen Tangentialpunct p gegeben ist, an dem Durchschnitte eines der drei durch das Quadrupel gehenden Geradenpaare z. B. an $p' = (aa', bb')$ die Tangente zu construiren.

Auflösung. Die gesuchte Tangente ist der zu $p'p$ in Beziehung auf $p'(a', b')$ zugeordnete harmonische Strahl. — Denn sieht man die gegebene Curve in der Art als Hesse'sche Curve an, dass $p'(a', b')$ die conische Polare von p in Beziehung auf eine der drei Fundamentalcurven ist, so sind dies zugleich die Doppelstrahlen der von p' nach den conjugirten Polen gehenden Involution [478]. Da nun p der conjugirte Pol zu p' ist, so sind $p'(p, p')$ conjugirte Strahlen der Involution und daher einander harmonisch zugeordnet in Beziehung auf $p'(a' b')$ [67, 40]. Aber der Strahl $p'p'$ ist die Tangente in p'. (Folgt auch aus [474].)

Zusatz. Construirt man auf diese Weise die Tangenten an den Durchschnitten von zwei durch das Quadrupel gehenden Geradenpaaren, so liefert der Schnittpunct dieser beiden Tangenten zugleich den zu p zugehörigen Tangentialpunct q. (Vgl. [412].)

488. Aufgabe. Wenn eine durch ein Punctquadrupel und den zugehörigen Tangentialpunct gegebene Curve nach

[486] durch ihre conjugirten Polepaare construirt ist, in einem beliebigen Puncte m derselben die Tangente zu construiren.

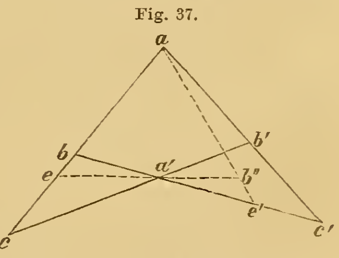
Auflösung. Ist m einer der construirten Puncte, so hat die Construction [486] auch den zu m conjugirten Pol m' ergeben, im entgegengesetzten Falle findet man m' nach [447]. Zieht man nun aus m Strahlen nach irgend zwei Paaren conjugirter Pole z. B. nach $a a'$ und $b b'$, so ist die gesuchte Tangente der zu $m m'$ conjugirte Strahl in der durch $m (a a' \, b b')$ bestimmten Involution [450] und kann nach [117] construirt werden.

§. 7.

489. Zwei conjugirte Polepaare desselben Systemes sind nach [442] stets correspondirende Punctepaare. Es gilt aber auch das Umgekehrte: Wenn zwei Paare correspondirender Puncte $a a'$, $b b'$ (d. h. solche Punctepaare, von denen jedes einen gemeinschaftlichen Tangentialpunct besitzt) zugleich correspondirende Punctepaare sind (d. h. so liegen, dass das durch sie bestimmte dritte Punctepaar $c c'$ ebenfalls sich auf der Curve befindet) so sind sie conjugirte Polepaare in demselben System. (*Cremona* art. 146. b.)

Beweis. Die drei Paare $a a'$, $b b'$, $c c'$ bilden die Ecken eines vollständigen Vierseits [82]. Wäre nun (Fig. 37) nicht b', sondern b'' der zu b conjugirte Pol in demselben Systeme, wie $a a'$, und ist dann $e e'$ das durch $a a'$ und $b b''$ bestimmte dritte Punctepaar, so würden $e e'$ auf der Curve liegen und mit $a a'$, $b b''$ die Ecken eines vollständigen Vierseits bilden [441].

Fig. 37.



Von jedem der Paare $c c'$ und $e e'$ liegt aber ein Punct mit $a b$ in gerader Linie, etwa c und e. Man hätte dann also vier Puncte $a \; b \; c \; e$, welche auf der Curve und zugleich in einer Geraden liegen, was nicht möglich ist.

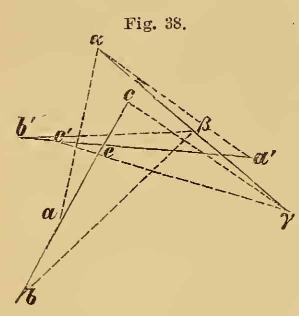
490. Hieraus folgt: Liegen die sechs Ecken eines vollständigen Vierseits auf einer Curve 3. O., so sind die drei Paare gegenüberliegender Ecken conjugirte Polepaare in dem-

selben System, und deren drei Tangentialpuncte liegen nach [379] in einer Geraden. — Denn je zwei gegenüberliegende Ecken sind correspondirende Puncte [379] und je zwei Paare gegenüberliegender Ecken correspondirende Punctepaare. (*Cremona* art. 146. b.)

491. Sind aa' conjugirte Pole in einem System mit dem Tangentialpunct α, bb' conjugirte Pole in einem zweiten Systeme mit dem Tangentialpunct β, und schneidet man die Curve mit ab, $a'b'$, $\alpha\beta$ resp. in c, c', γ, so sind cc' conjugirte Pole in dem dritten Systeme, und γ ihr Tangentialpunct.

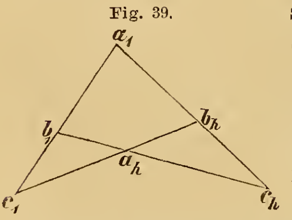
Beweis (Fig. 38). Zunächst folgt aus [230], da sowohl abc, als auch $a'b'c'$ in gerader Linie liegen, dass γ der Tangentialpunct sowohl zu c als auch zu c' ist. Demnach sind cc' correspondirende Puncte und können also auch als conjugirte Pole in einem der drei Systeme betrachtet werden [485]. Gehörten nun cc' und aa' zu demselben Systeme, so müsste nach [441] der Durchschnitt $(ac, a'c') = e$ auf der Curve und zugleich auf der Geraden ac liegen, auf welcher sich schon der Punct b befindet, dann aber hätte man vier Curvenpuncte in gerader Linie. Aus demselben Grunde können auch cc' und bb' nicht demselben Systeme angehören. — Dies gilt nur, wenn aa' und bb' selbst verschiedenen Systemen angehören, denn sonst würden ab und $a'b'$ die Curve in demselben Puncte treffen [441], und daher c mit c' zusammenfallen. (*Hesse.* Ueber Curven 3. O. etc. Crelle's Journ. Bd. 36. pag. 151. *Cremona* art. 146. c.)

Fig. 38.



492. Man kann mit Hülfe des vorigen Satzes, welcher sich auf conjugirte Polepaare verschiedener Systeme, und des Satzes [445], der sich auf conjugirte Pole desselben Systemes bezieht, die 16 Geraden von [385] wiederfinden, welche die Berührungspuncte der aus drei in gerader Linie liegenden Curvenpuncten an die Curve gelegten Tangenten zu je dreien verbinden. Denn

Fig. 39.



bezeichnet man wie in [385] mit $a_1\, b_1\, c_1$ irgend drei dieser Berührungspuncte, die in gerader Linie liegen, und mit $a_h\, b_h\, c_h$ ihre demselben Systeme angehörigen conjugirten Pole, so dass man die drei Systeme erschöpft, wenn man dem Index h nach und nach die Werthe 2, 3, 4 giebt, so liefert zuerst [445] die Geraden

$$a_1\, b_h\, c_h \qquad b_1\, a_h\, c_h \qquad c_1\, a_h\, b_h$$

welche neun Gerade darstellen, wenn h gleich 2, 3, 4 gesetzt wird. (Fig. 39.) Bezeichnet man ferner, wenn dem Index h drei verschiedene Werthe gegeben werden, diese mit h, i, k, so zieht in Folge von [491] die Existenz der Geraden $a_1\, b_1\, c_1$ die folgende

$$a_h\, b_i\, c_k$$

nach sich, welche sechs Gerade darstellt, wenn für h, i, k die allemal von einander verschiedenen Indices 2, 3, 4 in allen möglichen Anordnungen gesetzt werden. (*Hesse* l. c. [491] pag. 153. *Cremona* art. 149.)

493. Sind $a\, b\, c\, d$ vier beliebige Puncte einer Curve 3. O., $a'b'c'd'$, $a''b''c''d''$, $a'''b'''c'''d'''$ die ihnen in den drei Systemen conjugirten Pole, sodass $a a' a'' a'''$, $b b' b'' b'''$, $c c' c'' c'''$, $d d' d'' d'''$ vier Quadrupel bilden, und legt man durch eine der ersteren vier Gruppen, z. B. $a\, b\, c\, d$, einen Kegelschnitt, welcher die Curve in e, f schneidet, so liegen diese Puncte auch mit jeder der drei anderen Gruppen $a'b'c'd'$, $a''b''c''d''$, $a'''b'''c'''d'''$ in Kegelschnitten. — Aus [454], wenn man diesen Satz auf die conjugirten Pole in allen drei Systemen anwendet.

494. Die vier Punctgruppen $abcd$, $a'b'c'd'$, $a''b''c''d''$, $a'''b'''c'''d'''$ haben den nämlichen gegenüberliegenden Punct. — Aus [455].

495. Alle Curven 3. O., welche durch zwei dieser vier Punctgruppen hindurch gehen, gehen auch durch den Punct, welcher der Tangentialpunct ist zu dem den vier Gruppen gemeinschaftlich gegenüberliegenden Puncte. — Aus [457].

Neunter Abschnitt.

Die Cayley'sche Curve.

§. 1.

496. Die Curve, welche die sämmtlichen polaren Geradenpaare in Bezug auf eine Curve 3. O. u einhüllt, heisst die Cayley'sche Curve für die Fundamentalcurve u (*Cremona* art. 133. b.)*). Betrachtet man eine Curve 3. O. als eine Hesse'sche Curve, so dass ihr drei andere Curven 3. O. als Fundamentalcurven zugehören [483], so gehört zu jeder der letzteren eine andere Cayley'sche Curve.

497. Die drei Geradenpaare, welche die Puncte eines Quadrupels bei einer Curve 3. O. u verbinden, sind Tangenten an den drei Cayley'schen Curven, welche zu u gehören, wenn diese als Hesse'sche Curve aufgefasst wird. — Denn diese Geradenpaare sind die conischen Polaren des Tangentialpunctes in Beziehung auf die drei Fundamentalcurven [484]. (*Hesse.* Ueber Curven 3. O. etc. Crelle's Journ. Bd. 38. pag. 252. *Cremona.* 148. a)

498. Lässt man eine Gerade G alle möglichen Lagen in der Ebene annehmen und bestimmt jedesmal ihre vier Pole $a\ b\ c\ d$ bezüglich einer Curve 3. O., so beschreiben die Diagonalpuncte des vollständigen Vierecks $a\ b\ c\ d$ die Hesse'sche Curve [465], und die Seiten dieses Vierecks hüllen die Cayley'sche Curve ein. — Denn diese Seiten bilden die sämmtlichen conischen Polaren, welche aus Geradenpaaren bestehen [465]. (*Cremona* art. 133. d.)

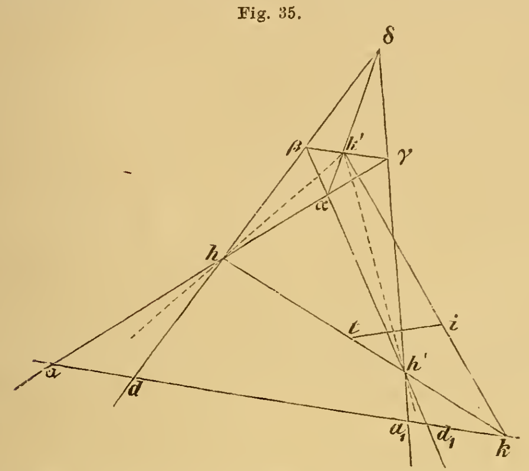
---

*) Nachdem *Hesse* (Ueber Curven dritter Ordnung und Curven dritter Classe. Crelle's Journ. Bd. 38. pag. 241) diese Curve zuerst aufgestellt und in Verbindung mit der Hesse'schen Curve betrachtet hatte, wurde sie später von *Cayley* (A memoir on curves of the third order. Phil. Trans. vol. 147. pag. 415) noch ausführlicher behandelt. *Cayley* selbst hatte diese und eine andere Curve von minderer Wichtigkeit mit den Namen „the Pippian“ und „the Quippian“ belegt, aus Anlass des Umstandes, dass er sie ursprünglich mit den Buchstaben P und Q bezeichnet hatte.

499. Die Cayley'sche Curve ist von der dritten Classe, d. h. aus jedem Puncte der Ebene gehen drei Tangenten an dieselbe [186]. — Denn durch jeden Punct der Ebene gehen drei Geraden, welche zu polaren Geradenpaaren gehören [465]. Für einen auf der Cayley'schen Curve liegenden Punct fallen zwei von diesen Tangenten zusammen. (*Hesse* l. c. [497] pag. 252. *Cayley*. A memoir on curves of the third order. Phil. Trans. vol. 147. pag. 417. *Cremona* art. 133. b.)

500. Die drei Tangenten, welche von einem Puncte h der Hesse'schen Curve (Fig. 35) an die Cayley'sche Curve

Fig. 35.



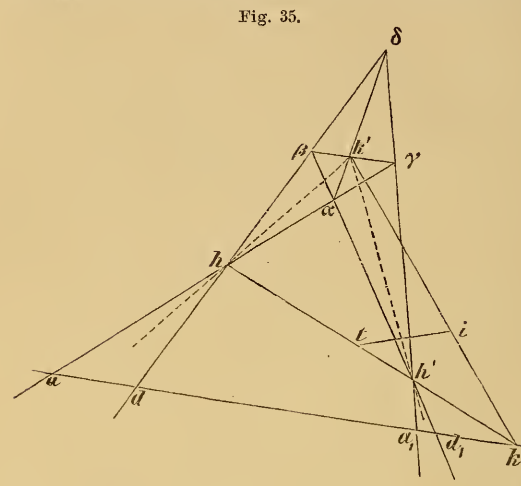
gelegt werden können, sind: das polare Geradenpaar, das sich in h schneidet, und die durch den zu h conjugirten Pol h' gehende Gerade. Die beiden ersteren bilden die conische Polare von h' und gehen zugleich durch die Puncte a, d, die mit h als Doppelpol zusammen die vier Pole der Geraden $h'k'$ bilden, welche die Hesse'sche Curve in h' berührt [473]. (*Cayley* l. c. [499] pag. 417. *Cremona* art. 133. c.)

501. Eine Gerade, welche zwei conjugirte Pole der Hesse'schen Curve verbindet, ist eine Tangente der Cayley'schen Curve. — Denn eine solche Gerade gehört einem polaren Geradenpaare an [470]. Und umgekehrt: Eine Tangente an der Cayley'schen Curve trifft die Hesse'sche Curve in zwei conjugirten Polen und im Allgemeinen ausserdem noch in einem dritten Puncte. — Aus [477], da eine Tangente an

der Cayley'schen Curve einem polaren Geradenpaare angehört. (*Cayley* l. c. [499] pag. 417. 423. *Cremona* art. 135. c.)

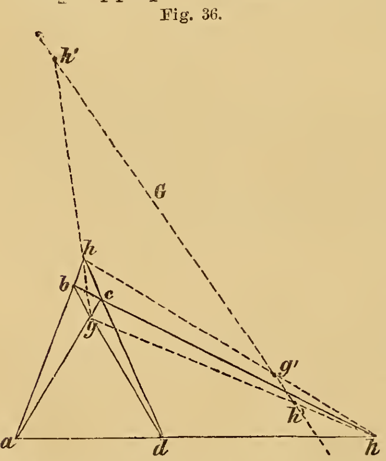
502. Unter den drei von einem Puncte h der Hesse'schen Curve (Fig. 35) an die Cayley'sche Curve gehenden Tangenten ist diejenige, welche durch den zu h conjugirten Pol h' geht, in Beziehung auf die beiden anderen Tangenten $h(a, d)$ harmonisch zugeordnet zu der Tangente hk' an der Hesse'schen Curve in h. — Aus [474] mit Rücksicht auf [500]. (*Cayley* l. c. [499] pag. 417.)

Fig. 35.



503. (Fig. 35.) Ist h ein Punct der Hesse'schen Curve, und sind a, d die Puncte, welche mit h als Doppelpol zusammen die vier Pole einer Geraden bilden [469], so sind diese zugleich diejenigen Puncte, in welchen die Tangenten $h(a, d)$ [500] die Cayley'sche Curve berühren. Die Gerade ad aber ist selbst auch eine Tangente der Cayley'schen Curve.

Fig. 36.



Beweis. Wenn $abcd$ (Fig. 36) die vier Pole einer Geraden G (bezüglich der Fundamental-Curve) sind, so sind ab, ac, ad die drei aus a an die Cayley'sche Curve gehenden Tangenten [498]. Fallen nun b und c in einen Doppelpol h zusammen, so liegt h auf der Hesse'schen Curve [467], gleichzeitig fallen dann auch die Tangenten ab, ac in eine ah zusammen, und daher

liegt dann a auf der Cayley'schen Curve und ist der Berührungspunct der Tangente $a\,h$ [187]. Ebenso wird d der Berührungspunct der Tangente $d\,h$, die Gerade $a\,d$ aber bleibt Tangente an der Cayley'sche Curve. (*Cremona* art. 135.)

Bemerkung. Ist h' (Fig. 35) der conjugirte Pol zu h, und a_1, d_1 die zu h' als Doppelpol gehörigen einfachen Pole, so sind auch a_1, d_1 die Berührungspuncte der von h' an die Cayley'sche Curve gehenden Tangenten $h'(a_1, d_1)$. Diese beiden Puncte aber liegen nach [472] auf der die Puncte a, d verbindenden Geraden, welche nach [469] mit hh' zusammen die conische Polare des Tangentialpunctes k' von h, h' bildet.

504. Man kann daher auch sagen: Sind h, h' (Fig. 35) zwei conjugirte Pole der Hesse'schen Curve, sodass [501] hh' eine Tangente an der Cayley'schen Curve ist, und zieht man aus h und h' die beiden übrigen an die Cayley'sche Curve gehenden Tangentenpaare $h(a, d)$ und $h'(a_1, d_1)$, (welches zugleich die conischen Polaren von h' und h sind [469 und 472]), so sind die Berührungspuncte $a\ d\ a_1\ d_1$ der vier letzteren Tangenten die Durchschnitte derselben mit derjenigen Geraden, welche mit $h\,h'$ zusammen eine conische Polare bildet. Diese letztere Gerade $a\ d\ a_1\ d_1\ k$ berührt die Cayley'sche Curve und schneidet sie ausserdem in den vier Puncten $a\ d\ a_1\ d_1$.

505. Zwei Tangenten der Cayley'schen Curve, welche die Eigenschaft haben, dass die Verbindungslinie ihrer Berührungspuncte wieder eine Tangente an derselben Curve ist, heissen correspondirende Tangenten. Dann sind diejenigen zwei aus einem Puncte der Hesse'schen Curve an die Cayley'sche Curve gehenden Tangenten, welche zusammen eine conische Polare bilden, stets correspondirende Tangenten [503]. (*Cremona.* art. 135 a.)

506. Lässt man eine Gerade G sich so bewegen, dass sie fortwährend die Hesse'sche Curve berührt, so dass von ihren vier Polen stets zwei in einen Doppelpol zusammenfallen, so beschreibt der Doppelpol h die Hesse'sche Curve [468], die beiden einfachen Pole a, d aber die Cayley'sche Curve, und die Verbindungslinien ha, ad, dh hüllen die Cayley'sche Curve ein. — [503.] (*Cremona.* art. 135.)

507. Zieht man aus einem Puncte h der Hesse'schen

Curve an die Cayley'sche eine Tangente ha (oder hd), welche nicht durch den zu h conjugirten Pol h' geht (Fig. 35) [500], so ist ihr Berührungspunct a (oder d) der Durchschnitt dieser Tangente mit derjenigen Geraden, welche mit $h\,h'$ zusammen eine conische Polare bildet [504] (nämlich die conische Polare des Tangentialpunctes k' von h, h' [469]). (*Cremona.* art. 135 c.)

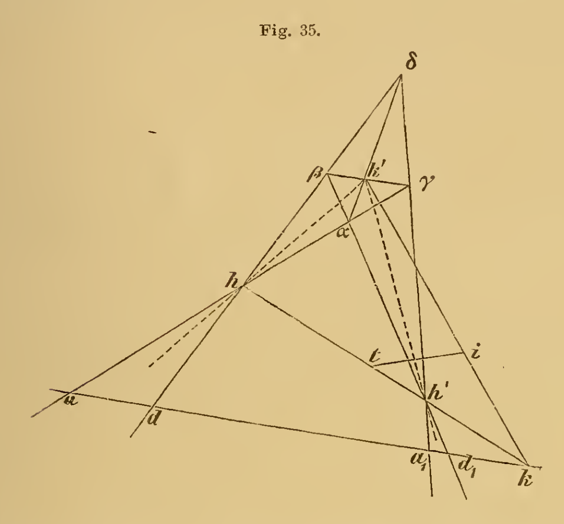
508. Zieht man aus einem Puncte h der Hesse'schen Curve (Fig. 35) an die Cayley'sche Curve diejenige Tangente, welche durch den zu h conjugirten Pol h' hindurchgeht [500] und die Cayley'sche Curve in t berühren möge; ist ferner k der dritte Schnittpunct dieser Geraden mit der Hesse'schen Curve, k' der conjugirte Pol zu k, und i der Punct, in welchem die Gerade kk' die Hesse'sche Curve schneidet, so trifft diejenige Gerade, welche mit $k\,k'$ zusammen eine conische Polare bildet und daher [436, 477] durch i geht, die Tangente hh' in dem Berührungspuncte t. — Denn betrachtet man die Tangente $hh'k$ als von k ausgehend, so geht sie nicht durch den zu k conjugirten Pol k', und folglich liegt nach [507] ihr Berührungspunct t auf derjenigen Geraden, welche mit $k\,k'$ zusammen eine conische Polare bildet; also auf $t\,i$.

509. (Fig. 35.) Eine Tangente $k\,a\,d$ an der Cayley'schen Curve schneidet diese Curve ausserdem in vier Puncten ad, $a_1 d_1$ und zwar: ist k ein Durchschnitt dieser Tangente mit der Hesse'schen Curve und $k\,h\,h'$ diejenige Tangente aus k an die Cayley'sche Curve, welche mit $k\,a\,d$ zusammen eine conische Polare bildet und daher [477] durch zwei conjugirte Pole $h\,h'$ geht, so sind ad, $a_1 d_1$ die Durchschnitte der ersteren Tangente mit den conischen Polaren von h' und h. Ausserdem sind auch $h(ad)$ und $h'(a_1 d_1)$ Tangenten an der Cayley'schen Curve, und ad, $a_1 d_1$ deren Berührungspuncte. — Aus [504], denn jede Tangente der Cayley'schen Curve ist eine Gerade eines polaren Geradenpaares [496], die dazu gehörige andere Gerade aber geht, wie auch die erstere, durch zwei conjugirte Pole der Hesse'schen Curve [477].

510. Trifft eine Tangente an der Cayley'schen Curve die Hesse'sche Curve in den Puncten h, h', k, von welchen $h\,h'$ conjugirte Pole seien [501], so ist ihr Berührungspunct t harmonisch zugeordnet zu k in Beziehung auf $h\,h'$. (Fig. 35.) (*Cayley* l. c. [499] pag. 417. 425. *Cremona* art. 135 c.)

Beweis. Sei k' der conjugirte Pol zu k, und i der dritte Schnittpunct der Hesse'schen Curve mit der Geraden kk', so trifft die nach [436, 477] durch i gehende Gerade, welche mit kk' zusammen ein polares Geradenpaar bildet, die Tangente $hh'k$ in dem Berührungspuncte t [508]. Nun bilden aber die einer conischen Polare angehörigen Geraden it und ik die Doppelstrahlen der Involution, deren conjugirte Strahlen von i nach den conjugirten Polen der Hesse'schen Curve gehen [478], mithin sind die Strahlen $i(h, h')$ einander harmonisch zugeordnet in Bezug auf $i(t, k)$, und daher $h\ h'\ t\ k$ vier harmonische Puncte.

Fig. 35.



511. (Fig. 35.) Die gemischte gerade Polare (bezüglich der Fundamental-Curve) [275] zweier Puncte der Hesse'schen Curve, von denen der eine, k', der Tangentialpunct des anderen, h, ist, ist eine Tangente der Cayley'schen Curve und verbindet den Berührungspunct h mit dessen conjugirten Pole h'. Und umgekehrt: Eine Tangente der Cayley'schen Curve ist die gemischte gerade Polare zweier Puncte der Hesse'schen Curve, von denen der eine der Tangentialpunct des anderen ist; und zwar: sind h, h' die conjugirten Pole, in welchen die Tangente an der Cayley'schen Curve die Hesse'sche Curve trifft, und k' deren Tangentialpunct, so ist $h\ h'$ die gemischte gerade Polare von h und k' (und auch von h' und k').

Beweis. Die gemischte gerade Polare zweier Puncte h und k' ist gleichzeitig die Polare von h in Beziehung auf die conische Polare von k', und die Polare von k' in Beziehung auf die conische Polare von h [275]. Aber die letztere ist das Geradenpaar $h'(a_1\ d_1)$ und die Polare von k' in Beziehung auf dieses ist $h\,h'$, da $h\,h'$ harmonisch zugeordnet ist zu $h'k'$ in Beziehung auf $h'(a_1\ d_1)$ [474] oder [502]. Da jede Tangente der Cayley'schen Curve die Hesse'sche Curve in zwei conjugirten Polen trifft [501], so gilt auch das Umgekehrte.

512. Demnach folgt: Die Cayley'sche Curve ist die Einhüllende der gemischten geraden Polaren je zweier Puncte der Hesse'schen Curve, von denen der eine der Tangentialpunct des andern ist. (*Cremona* art. 138 b.)

§. 2.

513. Die Cayley'sche Curve, welche von der dritten Classe ist [499], ist zugleich von der sechsten Ordnung, und besitzt daher weder Doppeltangenten noch Wendepuncte, dagegen neun Rückkehrpuncte. [187 Note.]

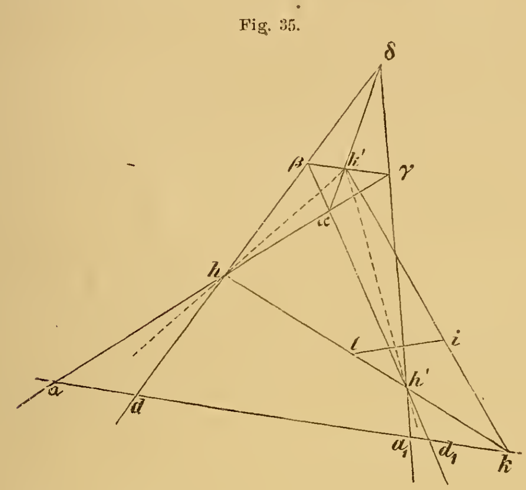
Beweis. Da die Cayley'sche Curve von der dritten Classe ist, so kann sie höchstens von der Ordnung $3 \,.\, 2 = 6$ sein. Nun trifft aber eine Tangente an der Cayley'schen Curve diese ausserdem noch in vier Puncten [509], sodass sie sechs Puncte mit der Curve gemein hat. Demnach ist diese auch nicht von einer niedrigeren Ordnung. (*Cremona* art. 135 b.)

514. Die Hesse'sche und die Cayley'sche Curve schneiden einander gar nicht, sondern berühren einander nur, und zwar in denjenigen neun Puncten, welche die conjugirten Pole der neun Wendepuncte der Hesse'schen Curve (und der Fundamental-Curve) sind. Ihre gemeinschaftlichen Tangenten in diesen neun Puncten sind die Wendetangenten der Fundamental-Curve.

Beweis. (Fig. 35.) Ist h ein Wendepunct der Hesse'schen Curve (also auch der Fundamental-Curve) und h' dessen conjugirter Pol, so berührt die Gerade $h\,h'$ die Hesse'sche Curve in h' und ist Wendetangente an der Fundamentalcurve in h. Es fällt nämlich der dritte Schnittpunct k der Geraden $h\,h'$ mit der Hesse'schen Curve mit h' zusammen [463]. Nun

ist $h\,h'$ auch Tangente an der Cayley'sche Curve, und deren Berührungspunct t harmonisch zugeordnet zu k in Beziehung auf $h\,h'$ [510]. Fällt also k nach h', so fällt auch t in diesen Punct, und daher berührt die Gerade $h\,h'$ in dem Puncte h' nicht bloss die Hesse'sche Curve, sondern auch die Cayley'sche Curve. Diese beiden Curven haben demnach in den neun zu den Wendepuncten conjugirten Polen achtzehn Puncte mit einander gemein. Da sie resp. von der dritten und sechsten Ordnung sind, so können sie ausserdem keinen Punct gemeinschaftlich haben. (*Cremona* art. 141 b.)

Fig. 35.



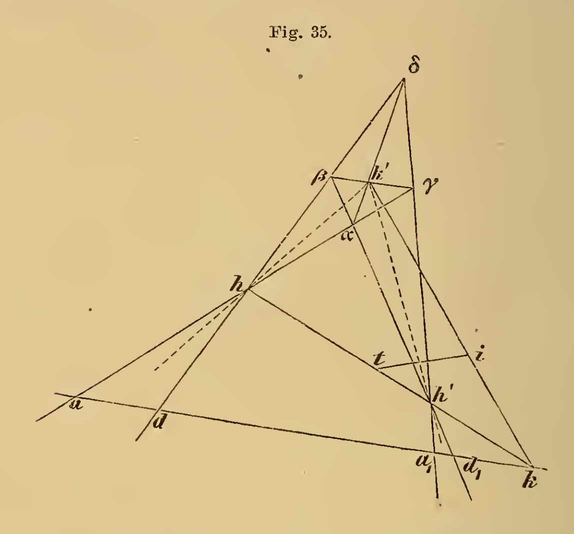
515. Die Cayley'sche Curve schneidet die Fundamentalcurve in den achtzehn Puncten, welche die Berührungspuncte der Tangenten sind, die die Fundamentalcurve ausser ihren Wendetangenten mit der Hesse'schen Curve gemeinschaftlich hat [464].

B e w e i s. Ist a der Berührungspunct einer dieser gemeinschaftlichen Tangenten auf der Fundamentalcurve (also kein Wendepunct) so ist er einer der vier Pole dieser Geraden [269]. Da diese auch zugleich die Hesse'sche Curve berührt, etwa in h', so fallen zwei Pole derselben in den zu h' conjugirten Pol h zusammen [468], und zwei liegen auf der Cayley'schen Curve [506]; da nun der Punct a nicht mit h zusammenfällt, weil er nicht auf der Hesse'schen Curve liegt,

so muss er auf der Cayley'schen Curve liegen. Die achtzehn auf der Fundamentalcurve liegenden Berührungspuncte befinden sich also auch auf der Cayley'schen Curve. Mehr als achtzehn Puncte aber können diese beiden Curven nicht gemeinschaftlich haben. (*Cremona* art. 141 a.)

516. Die harmonischen Polaren der neun Wendepuncte der Fundamental- und der Hesse'schen Curve sind die Rückkehrtangenten in den neun Spitzen der Cayley'schen Curve [513].

Fig. 35.



Beweis. Wenn h (Fig. 35) ein Wendepunct wird, so treten nach [463] und [475] folgende Specialisirungen ein: $h\,h'$ wird Wendetangente an der Fundamentalcurve und berührt die Hesse'sche Curve in h', sodass k nach h' fällt. Von den beiden Geraden $h'(a_1, d_1)$ welche die conische Polare von h bilden, fällt die eine, etwa $h'd_1$, mit der Wendetangente zusammen, und die andere $h'a_1$ oder jetzt $k\,a_1$ wird die harmonische Polare des Wendepunctes h. Nun waren aber die beiden jetzt zusammenfallenden Geraden $a_1 h'$ und $a_1 k$ Tangenten an der Cayley'schen Curve, und zwar bildete a_1 den Berührungspunct von $a_1 h'$ sodass in diese Gerade schon zwei Tangenten zusammenfielen [503], und $a_1 k$ war die dritte von a_1 an die Cayley'sche Curve gehende Tangente [503]. Da diese dritte jetzt auch mit den beiden ersteren zusammenfällt,

so bilden diese drei in die harmonische Polare von h zusammenfallenden Geraden eine Rückkehrtangente der Cayley'schen Curve, und a_1 wird der Rückkehrpunct. [187. Note.] (*Hesse* l. c. [497] pag. 260. *Cremona* art. 141. c.)

Zehnter Abschnitt.

Der begleitende Kegelschnitt.

517. Zieht man aus einem Puncte a die sechs Tangenten an eine Curve 3. O., deren Berührungspuncte also [270] auf der conischen Polare von a liegen, so befinden sich die Tangentialpuncte dieser sechs Berührungspuncte nach [248] auf einem neuen Kegelschnitte, welcher der den Punct a und die conische Polare desselben begleitende Kegelschnitt genannt werden soll. (*Cremona* art. 138. „conica satellite.“ *Curtze* übersetzt „beigeordneter Kegelschnitt“.)

518. Die conische Polare eines Punctes a und der sie begleitende Kegelschnitt berühren einander in den beiden Puncten, in welchen beide von der geraden Polare von a getroffen werden. (*Salmon* pag. 68. *Cremona* art. 138.)

Beweis. Sei x ein beliebiger Punct, und z einer der Durchschnitte der Geraden $a\,x$ mit der Curve 3. O. $u = 0$. Dann kann man setzen [19]

$$z_i = a_i + \lambda x_i \qquad (i = 1, 2, 3)$$

und erhält [149] die Werthe von λ, welche den drei Durchschnittspuncten der Geraden $a\,x$ mit der Curve zugehören, aus der Gleichung

$$0 = u_a + \lambda \Delta_x(u_a) + \frac{\lambda^2}{2} \Delta_x{}^2(u_a) + \frac{\lambda^3}{2\,.\,3} \Delta_x{}^3(u_a),$$

die man auch schreiben kann [5]

$$0 = u_a + \lambda \Delta_x(u_a) + \lambda^2 \Delta_a(u_x) + \lambda^3 u_x,$$

oder, wenn man zur Abkürzung

$$\Delta_x(u_a) = \Delta', \quad \Delta_a(u_x) = \tfrac{1}{2} \Delta_x{}^2(u_a) = \Delta''$$

setzt,

$$(1) \qquad 0 = u_a + \lambda \Delta' + \lambda^2 \Delta'' + \lambda^3 u_x.$$

Darin bedeutet $\Delta' = 0$ die gerade Polare, und $\Delta'' = 0$ die conische Polare des Punctes a bei veränderlichen x_i [267]. Soll nun der Punct x so liegen, dass die Gerade ax die Curve berührt, so muss die Gleichung (1) zwei gleiche Wurzeln λ haben, die Bedingung dafür aber ist [9]

$$(4u_a\Delta'' - \Delta'^2)\Delta''^2 + (4\Delta'^3 - 18u_a\Delta'\Delta'' + 27\,u_x u_a^2)u_x = 0.$$

Diese Gleichung stellt bei veränderlichen x_i den geometrischen Ort aller der Puncte x dar, für welche die Gerade ax Tangente an der Curve ist; sie ist also die Gleichung der sechs von a an die Curve gehenden Tangenten. In der That ist diese Gleichung vom sechsten Grade, da Δ', Δ'', u_x resp. vom 1., 2., 3. Grade sind, während u_a eine Constante ist. Setzt man $u_x = 0$, so erhält man die Puncte, welche die sechs Tangenten mit der Curve gemein haben. Für $u_x = 0$ aber wird

$$\Delta''^2 = 0 \quad \text{und} \quad 4u_a\Delta'' - \Delta'^2 = 0.$$

Die erste Gleichung sagt aus, dass ein Theil dieser der Curve und den sechs Tangenten gemeinsamen Puncte auf zwei mit Δ'', d. h. mit der conischen Polare von a, zusammenfallenden Kegelschnitten liegen, dass die Tangenten also die Curve in den Durchschnitten mit der conischen Polare berühren, wie bekannt [270]. Die zweite Gleichung aber sagt aus, dass die übrigen der Curve und den sechs Tangenten gemeinsamen Puncte (d. i. die Tangentialpuncte der sechs Berührungspuncte) auf dem Kegelschnitte

$$K = 4u_a\Delta'' - \Delta'^2 = 0$$

liegen. Dies ist die Gleichung des begleitenden Kegelschnittes. Die Form derselben zeigt, dass der begleitende Kegelschnitt die conische Polare $\Delta'' = 0$ in den Puncten berührt, in welchen beide von der geraden Polare $\Delta' = 0$ getroffen werden, denn setzt man $\Delta'' = 0$, so folgt $\Delta'^2 = 0$, d. h. die Puncte, welche $\Delta'' = 0$ und $K = 0$ gemeinsam haben, liegen auf zwei mit $\Delta' = 0$ zusammenfallenden Geraden. (*Salmon* pag. 68.)

519. Hieraus und aus [274] folgt unmittelbar: Die gerade Polare eines Punctes bezüglich einer Curve 3. O. ist gemeinschaftlich die Polare desselben Punctes sowohl in Bezug auf dessen conische Polare, als auch in Bezug auf ihren begleitenden Kegelschnitt, und trifft diese beiden Kegelschnitte in denselben Puncten.

520. Besteht die conische Polare eines Punctes a aus zwei Geraden C, C', (sodass a auf der Hesse'schen Curve liegt [268]), so besteht auch der begleitende Kegelschnitt aus zwei Geraden, nämlich aus den Begleiterinnen der Geraden C und C' [230]. — Denn der begleitende Kegelschnitt geht durch die Tangentialpuncte der Puncte, in welchen C und C' die Curve schneiden; diese Tangentialpuncte aber liegen zu je drei auf zwei Geraden, die eben die Begleiterinnen von C und C' sind [230]. (*Cremona* art. 138 a.)

521. Bilden zwei Gerade C, C' die conische Polare eines Punctes a der Hesse'schen Curve, so schneiden sich ihre Begleiterinnen B, B' ebenso wie C, C' [438] in dem zu a conjugirten Pole a' der Hesse'schen Curve. — Denn die Polare von a in Bezug auf die beiden Kegelschnitte (C, C') und (B, B') ist eine und dieselbe Gerade [519] und trifft beide in denselben Puncten. Für (C, C') fallen diese Durchschnittspuncte in a' zusammen, also auch für (B, B'). (*Cremona* art. 138 a.)

522. Da der Durchschnittspunct einer Geraden und ihrer Begleiterinn der begleitende Punct der ersteren Geraden ist [230], so folgt: Zwei Gerade, welche die conische Polare eines Punctes a der Hesse'schen Curve bilden, haben beide den zu a conjugirten Pol a' der Hesse'schen Curve zum begleitenden Punct. (*Cremona* art. 138 a.)

523. Da eine einem polaren Geradenpaare angehörige Gerade eine Tangente an der Cayley'schen Curve ist [496], so folgt ferner: Der eine Tangente der Cayley'schen Curve begleitende Punct liegt auf der Hesse'schen Curve, oder anders ausgedrückt: Schneidet eine Tangente der Cayley'schen Curve die Fundamentalcurve in $a\ b\ c$, und sind $\alpha\ \beta\ \gamma$ deren Tangentialpuncte, so liegt der Durchschnitt der Geraden $a\ b\ c$ und $\alpha\ \beta\ \gamma$ auf der Hesse'schen Curve.

524. Demnach: Umhüllt eine Gerade die Cayley'sche Curve, so beschreibt der die Gerade begleitende Punct die Hesse'sche Curve, oder: die Hesse'sche Curve ist der geometrische Ort für die begleitenden Puncte der Tangenten der Cayley'schen Curve. (*Cayley* l. c. [499] pag. 439. *Cremona* art 138 a.)

525. (Fig. 35.) Ist h ein Punct der Hesse'schen Curve, h' der ihm conjugirte Pol und $h'k'$ die Tangente der Hesse'schen Curve in h', so sind die Geraden $h'h$ und $h'k'$ einander harmonisch zugeordnet, sowohl in Bezug auf die conische Polare von h, als auch in Bezug auf den begleitenden Kegelschnitt derselben. — Denn die Tangente $h'k'$ ist die gerade Polare von h in Beziehung auf die Fundamentalcurve, [459] und daher [519] die Polare von h sowohl in Bezug auf die conische Polare von h, als auch in Bezug auf den begleitenden Kegelschnitt.

Elfter Abschnitt.

Die Poloconik einer Geraden in Verbindung mit der Hesse'schen Curve. Kegelschnitte, welche eine Curve 3. O. in drei Puncten berühren.

§. 1.

526. Die Poloconik einer Tangente der Cayley'schen Curve besteht aus zwei Geraden; und umgekehrt: eine Gerade, deren Poloconik aus zwei Geraden besteht, ist eine Tangente der Cayley'schen Curve. — Denn da nach [496] eine Tangente der Cayley'schen Curve stets einem polaren Geradenpaare angehört, und umgekehrt jede solche Gerade die Cayley'sche Curve berührt, so kommen [327] [328] zur Anwendung. (*Cayley* l. c. [499] pag. 432.)

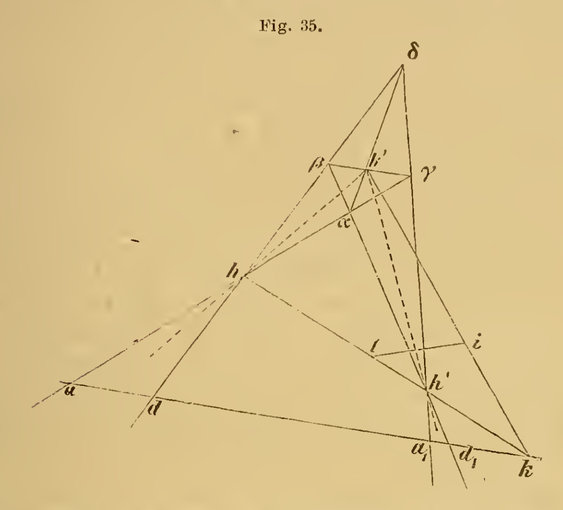
527. Hieraus folgt: Die Cayley'sche Curve ist die Einhüllende der Geraden, deren Poloconiken aus Geradenpaaren bestehn. (*Cayley* l. c. [499] pag. 432. *Cremona* art. 136. b.)

528. Die Poloconik der Geraden $h\,h'$, welche zwei conjugirte Pole der Hesse'schen Curve verbindet, besteht aus den Tangenten $k'(h, h')$ in h und h' an der Hesse'schen Curve. (Fig. 35.)

Beweis. Die Gerade $h\,h'$ gehört zu einem polaren Geradenpaare, dessen Doppelpunct der dritte Durchschnitt k der Geraden $h\,h'$ mit der Hesse'schen Curve ist [469], folglich ist

die Poloconik von hh' ein Geradenpaar, das sich in dem Pole jenes polaren Geradenpaares, d. h. in dem zu k conjugirten Pole k' schneidet [328]. Nun hat aber die Gerade hh' mit der conischen Polare von h zwei Puncte gemein in h', also geht nach [321] die Poloconik von hh' durch h hindurch; ebenso geht sie auch durch h', und folglich ist sie das Geradenpaar $k'(h, h')$. Der Punct k' aber ist nach [449] der Tangentialpunct zu h und h'. (*Cremona* art. 136. b.)

Fig. 35.



529. Daraus folgt auch umgekehrt: Eine Tangente der Hesse'schen Curve bildet einen Theil der Poloconik derjenigen Geraden, welche den Berührungspunct h mit dessen conjugirten Pole h' verbindet, und der andere Theil dieser Poloconik ist dann die Tangente in h'.

530. Ferner folgt aus [528] und als Ergänzung zu [329]: Bilden die Geraden $k(hh', ll')$ ein polares Geradenpaar, welches die Hesse'sche Curve in den conjugirten Polepaaren hh' und ll' [477], und ausserdem so wie sich selbst in k schneidet, so bilden die Poloconiken von hh' und ll' die vier aus dem zu k conjugirten Pole k' an die Hesse'sche Curve gehenden Tangenten, nämlich resp. $k'(h, h')$ und $k'(l, l')$. (*Cremona* art. 137. b.)

531. Demnach: Die Hesse'sche Curve, welche nach [330] der geometrische Ort der Doppelpuncte der aus Geraden-

paaren bestehenden Poloconiken ist, ist zugleich die Einhüllende dieser Geradenpaare. (*Cremona* art. 136. b.)

§. 2.

532. Die Poloconik einer beliebigen Geraden G schneidet die Hesse'sche Curve nicht, sondern berührt sie stets in drei Puncten a', b', c', welche die conjugirten Pole sind zu den drei Puncten a, b, c, in denen die Hesse'sche Curve von der Geraden G getroffen wird. (*Cremona* art. 137.)

Beweis. Nach [315] gehört zu jedem Puncte a der Geraden G ein Punct der Poloconik als Pol von G in Bezug auf die conische Polare von a. Liegt nun aber a auf der Hesse'schen Curve, so ist seine conische Polare ein Geradenpaar, das sich in dem zu a conjugirten Pole a' schneidet, und daher ist in Beziehung auf dieses Geradenpaar a' der Pol der Geraden G (wie auch jeder anderen Geraden). Demnach ist a' der zu a gehörige Punct der Poloconik. Dann aber berührt nach [316] die gerade Polare von a die Poloconik in a'. Da nun dieselbe gerade Polare nach [459] auch die Hesse'sche Curve in a' berührt, so haben die Hesse'sche Curve und die Poloconik von G in a' eine gemeinschaftliche Tangente, berühren einander also in a'. Dasselbe gilt von b' und c', und da diese beiden Curven auf diese Art sechs Puncte gemeinschaftlich haben, so schneiden sie sich ausserdem nicht mehr.

Bemerkung. In dem speciellen Falle, dass die Poloconik aus zwei Geraden besteht, dass also die Gerade G zwei conjugirte Pole h, h' der Hesse'schen Curve verbindet [327, 477], bleibt dieser Satz nach [528] gültig, nur tritt an die Stelle des einen Berührungspunctes der Tangentialpunct von h, h', in welchem die Poloconik dann auch zwei zusammenfallende Puncte mit der Hesse'schen Curve gemein hat.

533. Fallen von den drei Puncten a, b, c zwei z. B. a und b zusammen, so folgt: Berührt eine Gerade G die Hesse'sche Curve in a und schneidet sie in c, so hat die Poloconik von G in dem zu a conjugirten Pole a' eine vierpunctige, und in dem zu c conjugirten Pole c' eine zweipunctige Berührung mit der Hesse'schen Curve. (*Cremona* art. 137.)

534. Fallen in [532] alle drei Puncte a, b, c zusammen,

so folgt: Ist G eine Wendetangente der Hesse'schen Curve, so hat die Poloconik von G in dem zu dem Wendepuncte w conjugirten Pole w' der Hesse'schen Curve mit dieser eine sechspunctige Berührung. (*Cremona.* art. 137.)

Bemerkung. Dies kommt mit [350] überein. Denn w' ist zugleich der Berührungspunct einer aus w an die Hesse'sche Curve gehenden Tangente [463].

535. Die sechs Puncte, in welchen die Poloconiken zweier Geraden G und G' die Hesse'sche Curve berühren [532], liegen auf einem Kegelschnitte, nämlich auf der gemischten Poloconik von G und G'.

Beweis. Ist a ein Durchschnitt von G mit der Hesse'schen Curve, so ist der zu a conjugirte Pol a' ein Berührungspunct der Poloconik von G mit der Hesse'schen Curve [532] und zugleich der Durchschnitt des Geradenpaares, das die conische Polare von a bildet. Bezüglich dieses Geradenpaares aber ist a' nicht bloss der Pol von G [532], sondern auch von G', und daher nach [333] ein Punct der gemischten Poloconik von G und G'. (*Cremona.* art. 137. a.)

Bemerkung. Dass die sechs Berührungspuncte als die conjugirten Pole der sechs Durchschnittspuncte zweier Geraden G und G' auf einem Kegelschnitte liegen, folgt schon aus [456], da G und G' zusammen einen Kegelschnitt bilden.

536. Sind aa' und bb' zwei Paare conjugirter Pole der Hesse'schen Curve, α und β ihre resp. Tangentialpuncte, so liegen diese sechs Puncte allemal auf einem Kegelschnitt, nämlich auf der gemischten Poloconik von aa' und bb'. — Denn die Geradenpaare α (a, a') und β (b, b') sind nach [528] die Poloconiken von aa' und bb'. Diese berühren die Hesse'sche Curve in a, a' und b, b', an die Stelle der beiden dritten Berührungspuncte aber treten nach [532] die Tangentialpuncte α und β. Mithin ist die Behauptung ein specieller Fall von [535]. (*Cremona.* art. 137. a.)

537. Fallen im Vorigen α und β zusammen, so folgt: Bilden zwei Paare conjugirter Pole aa', bb' ein Punctquadrupel, d. h. haben sie einen gemeinschaftlichen Tangentialpunct α, so berührt der durch $aa'bb'\alpha$ gehende Kegelschnitt die Hesse'sche Curve in α; dieser Kegelschnitt ist die ge-

mischte Poloconik der Geraden aa' und bb', zugleich aber auch die conische Polare von α in Beziehung auf die Hesse'sche Curve [269, 270]. (*Cremona*. art. 137. b.)

538. Daher folgt in Verbindung mit [481]: Die gemischte Poloconik solcher zwei Geraden, die bezüglich der Fundamentalcurve die conische Polare eines Punctes α der Hesse'schen Curve bilden, ist zugleich die conische Polare von α bezüglich der Hesse'schen Curve. (*Cremona*. art. 137. b.)

539. Legt man durch die drei Puncte a', b', c', in denen die Hesse'sche Curve von der Poloconik einer Geraden G berührt wird, einen beliebigen Kegelschnitt K, so haben die Puncte α', β', γ', in denen dieser Kegelschnitt die Hesse'sche Curve trifft, die Eigenschaft, dass diese Curve in ihnen von der Poloconik einer anderen Geraden G' berührt wird, und dann ist K nach [535] die gemischte Poloconik von G und G'. (*Cremona* art. 137. a.)

B e w e i s. Der Annahme nach liegen $a' b' c' \alpha' \beta' \gamma'$ auf dem Kegelschnitt K. Bezeichnet man ihre conjugirten Pole mit $a\ b\ c\ \alpha\ \beta\ \gamma$, so liegen diese sechs Puncte nach [456] ebenfalls auf einem Kegelschnitte. Allein $a\ b\ c$ liegen nach [532] auf der Geraden G, mithin müssen $\alpha\ \beta\ \gamma$ auch auf einer Geraden G' liegen, und folglich berührt die Poloconik von G' die Hesse'sche Curve in $\alpha'\ \beta'\ \gamma'$ [532].

§. 3.

540. Sind $a_1\ b_1\ c_1$ drei in gerader Linie liegende Puncte einer Curve 3. O., und nimmt man, indem man die Curve als die Hesse'sche zu einer der drei zugehörigen Fundamentalcurven betrachtet, die in dem entsprechenden Systeme zu $a_1\ b_1\ c_1$ conjugirten Pole $a_2\ b_2\ c_2$ [485], so folgt aus [532], dass die Curve 3. O. in diesen drei Puncten $a_2\ b_2\ c_2$ von einem Kegelschnitte berührt wird, welcher die Poloconik der Geraden $a_1\ b_1\ c_1$ in Beziehung auf die gewählte Fundamentalcurve ist.

Bezeichnet man daher mit $a_2\ b_2\ c_2$, $a_3\ b_3\ c_3$, $a_4\ b_4\ c_4$ die Puncte, welche in den drei verschiedenen Systemen zu $a_1\ b_1\ c_1$ als conjugirte Pole gehören, sodass $a_1\ a_2\ a_3\ a_4$, $b_1\ b_2\ b_3\ b_4$, $c_1\ c_2\ c_3\ c_4$ drei Punctquadrupel bilden [485], deren drei Tangentialpuncte

$\alpha\,\beta\,\gamma$ in gerader Linie liegen (weil $a_1\,b_1\,c_1$ sich auf einer Geraden befinden [230]), so wird die Curve 3. O. sowohl in $a_2\,b_2\,c_2$, als auch in $a_3\,b_3\,c_3$ und in $a_1\,b_1\,c_1$ von je einem Kegelschnitte berührt. Demnach gehören jeden drei in gerader Linie liegenden Curvenpuncten $a_1\,b_1\,c_1$ drei solche Kegelschnitte zu, und diese sind die Poloconiken der Geraden $a_1\,b_1\,c_1$ in Beziehung auf die drei Fundamentalcurven, für welche die gegebene Curve die Hesse'sche ist. (*Hesse*. Ueber Curven 3. O. Crelle's Journ. Bd. 36. pag. 165.)

541. Wenn ein Kegelschnitt eine Curve 3. O. in drei Puncten a, b, c berührt, und man nimmt zu diesen die conjugirten Pole in jedem der drei Systeme, so bilden dieselben in zweien dieser Systeme wieder die Berührungspuncte je eines Kegelschnittes, in dem dritten Systeme aber liegen sie in gerader Linie.

Beweis. Wenn sechs Curvenpuncte in einem Kegelschnitte liegen, so liegen ihre conjugirten Pole, gleichviel in welchem Systeme diese genommen werden, in einem neuen Kegelschnitte [485, 456]. Da nun hier von den sechs Puncten je zwei zusammenfallen, so fallen auch von ihren conjugirten Polen je zwei zusammen, der neue Kegelschnitt berührt daher die Curve in den conjugirten Polen der Berührungspuncte des ersten Kegelschnittes. Von den drei Kegelschnitten, die man so erhält, degenerirt aber stets einer und nur einer in zwei zusammenfallende Gerade. Denn da a, b, c die Berührungspuncte eines Kegelschnittes sind, so liegen ihre Tangentialpuncte α, β, γ nach [228] in einer Geraden. Dann aber treffen die Seiten bc, ca, ab des Dreiecks abc nach [390] die Curve in drei in gerader Linie liegenden Puncten a', b', c', und da nun $a\,b\,c$ und $a'\,b'\,c'$ die sechs Ecken eines vollständigen Vierseits sind, so sind nach [490] $a'\,b'\,c'$ conjugirte Pole zu $a\,b\,c$ in demselben Systeme, Demnach liegen in der That die zu $a\,b\,c$ conjugirten Pole $a'\,b'\,c'$ in einem der drei Systeme in einer Geraden. Da nun aber die gegebenen Puncte und ihre conjugirten Pole in den beiden anderen Systemen zugleich die conjugirten Pole der drei Systeme zu $a'\,b'\,c'$ sind, und diese in einer Geraden liegen, so kann dies nach [445] in keinem der anderen Systeme der Fall sein. Wendet man die Bezeichnung von [385, 492] an, sodass z. B.

$a_1\,a_h$ und $a_i\,a_k$ conjugirte Pole in demselben Systeme sind, und bezeichnet die gegebenen Puncte z. B. mit $a_1\,b_i\,c_k$, so sind ihre conjugirten Pole in den drei Systemen folgende: $a_h\,b_k\,c_i$, $a_i\,b_1\,c_h$, $a_k\,b_h\,c_1$, und von diesen liegen nur die drei ersten Puncte in gerader Linie [385]. (*Hesse* l. c. [540] pag. 166. *Cremona* art. 150.)

542. Dieselbe Betrachtung ergiebt nun auch als Ergänzung zu [226] und [383]: Sind α, β, γ drei in gerader Linie liegende Curvenpuncte, und a_1, b_i die Berührungspuncte von irgend zwei resp. aus α und β an die Curve gelegten Tangenten, so liegt von den vier Berührungspuncten der von γ ausgehenden Tangenten einer, c_i, mit $a_1\,b_i$ in gerader Linie, die drei anderen, c_k, c_h, c_1 dagegen bilden mit a_1 und b_i die Berührungspuncte je eines Kegelschnittes; und diese drei Puncte $c_k\,c_h\,c_1$ sind die conjugirten Pole zu jenem c_i in den drei verschiedenen Systemen.

543. Da nun nach [541] die zu den drei Berührungspuncten conjugirten Pole in einem der drei Systeme allemal in gerader Linie liegen, so folgt aus [540], dass jeder eine Curve dritter Ordnung in drei Puncten berührende Kegelschnitt einer der in [540] betrachteten ist und daher nach [532] angesehen werden kann als die Poloconik einer Geraden in Beziehung auf eine der drei Fundamentalcurven, für welche die gegebene Curve die Hesse'sche ist.

Demnach theilen sich alle die Curve in drei Puncten berührenden Kegelschnitte in drei Systeme, ganz entsprechend den drei Systemen conjugirter Pole, und bilden die Poloconiken sämmtlicher Geraden in Beziehung auf die drei Fundamentalcurven. Für irgend einen dieser Kegelschnitte z. B. mit den Berührungspuncten $a_1\,b_i\,c_k$ findet man das System, welchem er angehört, wenn man den Punct c_i aufsucht, in welchem die Verbindungslinie zweier Berührungspuncte z. B. a_1, b_i die Curve schneidet. Demjenigen Systeme, in welchem dieser Punct c_i zu dem dritten Berührungspunct c_k als conjugirter Pol gehört, gehört auch der betrachtete Kegelschnitt an [542]. (*Hesse* l. c. [540] pag. 166.)

544. Aus [539] folgt dann unmittelbar: Legt man durch die drei Berührungspuncte a, b, c eines Kegelschnitts einen beliebigen Kegelschnitt, so sind die drei anderen Durchschnitte

des letzteren mit der Curve die Berührungspuncte eines zweiten Kegelschnittes, der demselben Systeme angehört, wie der erstere. (*Hesse* l. c. [540] pag. 167. *Cremona* art. 150.)

545. Ferner folgt aus [535]: Die sechs Puncte, in denen zwei dem nämlichen Systeme angehörende Kegelschnitte die Curve berühren, liegen allemal selbst auf einem Kegelschnitte. (*Hesse* l. c. [540] pag. 167. *Cremona* art. 150.)

546. Durch die nämlichen zwei Puncte m und m' gehen zwölf Kegelschnitte, welche die Curve 3. O. in drei Puncten berühren, und zwar aus jedem System vier. — Denn nach [324] gehen durch m und m' vier Polokoniken in Beziehung auf jede der drei Fundamentalcurven. (*Cremona* art. 150.)

547. Wenn in [543] von den drei Berührungspuncten zwei zusammenfallen, so treten Kegelschnitte auf, welche die Curve in einem Puncte vierpunctig und in einem anderen zweipunctig berühren. Alle solche Kegelschnitte theilen sich ebenfalls in drei Systeme und bilden nach [533] die Polokoniken der die gegebene Curve berührenden Geraden in Beziehung auf die drei Fundamentalcurven, für welche die gegebene die Hesse'sche Curve ist. In diesem Falle ist, wie sich aus [542] ergiebt, der vierpunctige Berührungspunct ein conjugirter Pol zu dem Puncte, in dem die Verbindungslinie der beiden Berührungspuncte (des zweipunctigen und des vierpunctigen) die Curve trifft, und der Kegelschnitt gehört demselben Systeme an, wie diese beiden conjugirten Pole. (*Hesse* l. c. [540] pag. 171.)

§. 4.

548. Unter den Kegelschnitten, welche eine Curve 3. O. in drei Puncten berühren [543], befinden sich auch solche, bei welchen alle drei Berührungspuncte zusammenfallen, die also eine sechspunctige Berührung mit der Curve haben. Diese sind nach [534] die Polokoniken der neun Wendetangenten der gegebenen Curve in Beziehung auf die drei Fundamentalcurven. Die Berührungspuncte aber sind zugleich die Berührungspuncte der von den Wendepuncten ausgehenden Tangenten [351], und auch die den Wendepuncten in den drei Systemen conjugirten Pole. Es giebt daher 27 solcher Kegel-

schnitte, und eben so viele Puncte, in denen diese die Curve sechspunctig berühren. Sie theilen sich wiederum in drei Systeme, sodass in jedem neun sich befinden. Diese 27 Puncte sollen kurz die Puncte π genannt werden. (*Hesse* l. c. [540] pag. 173. *Cremona* art. 150.)

549. Da in diesem Falle der gemeinschaftliche Tangentialpunct eines Wendepunctes und eines ihm conjugirten Poles in den Wendepunct fällt, so bilden drei in gerader Linie liegende Wendepuncte und die drei mal drei ihnen conjugirten Pole ein System von solchen zwölf Puncten, welche zu je dreien auf 16 Geraden liegen [385]. Bezeichnet man daher mit a_1 b_1 c_1 drei in gerader Linie liegende Wendepuncte und wie in [492] mit a_h b_h c_h die ihnen conjugirten Pole desselben Systemes, so sind dies zugleich drei demselben Systeme angehörige Puncte π [548]. Dann folgt aus [492]: Die Verbindungslinie je zweier Puncte π, die demselben Systeme angehören, geht allemal durch einen Wendepunct [vgl. 387]. Verbindet man jeden Punct π mit den übrigen acht Puncten desselben Systems, so erhält man $9 . 8 = 72$ Gerade, von denen aber jede zweimal vorkommt. Es giebt daher in jedem Systeme 36 und also im Ganzen 108 solcher Geraden, von denen jede durch einen Wendepunct geht. (*Hesse* l. c. [540] pag. 175. *Cremona* art. 150.)

550. Ebenso folgt weiter aus [492] oder [491]: Die Verbindungslinie je zweier Puncte π, welche verschiedenen Systemen angehören, geht durch einen Punct π des dritten Systemes. Verbindet man daher einen Punct π des einen Systemes mit den neun Puncten des zweiten Systemes, so gehen diese neun Geraden durch die neun Puncte des dritten Systems. Wenn man also denselben Punct π mit den neun Puncten des dritten Systemes verbindet, so erhält man dieselben neun Geraden wieder. Man wird demnach sämmtliche Geraden erhalten, wenn man diese Operation mit den neun Puncten eines Systems wiederholt. Mithin giebt es $9 . 9 = 81$ solcher Geraden. (*Hesse* l. c. [540] pag. 175. *Cremona* art. 150.)

551. Von den neun Puncten π eines und desselben Systemes liegen 66 mal 6 auf einem Kegelschnitt. — Denn da diese neun Puncte die conjugirten Pole (in demselben

Systeme) der neun Wendepuncte sind, so liegen sechs von ihnen stets auf einem Kegelschnitt, so bald die ihnen conjugirten Wendepuncte auf einem Kegelschnitte liegen [456], was nur möglich ist, wenn die letzteren auf zwei Geraden vertheilt sind. Es gehen aber 12 Gerade durch je drei Wendepuncte [353], und diese lassen sich auf $\frac{12 \cdot 11}{1 \cdot 2} = 66$ verschiedene Arten zu Geradenpaaren anordnen. (*Hesse* l. c. [540] pag. 175. *Cremona* art. 150.)

552. Durch die neun Puncte π desselben Systems geht keine zweite Curve 3. O. hindurch. — Denn nimmt man irgend sechs dieser Puncte, welche auf einem Kegelschnitt liegen [551], so liegen die übrigen drei nicht auf einer Geraden, da vielmehr die Verbindungslinie von zweien dieser drei letzten durch einen Wendepunct geht [549]; mithin kommt [223] zur Anwendung. (*Hesse* l. c. [540] pag. 176.)

553. Legt man durch einen Punct π, in welchem die Curve 3. O. von einem Kegelschnitte sechspunctig berührt wird, einen anderen Kegelschnitt, der die Curve in π dreipunctig berührt, so sind die drei Puncte, in welchen der letztere die Curve ausserdem trifft, Berührungspuncte für einen dritten Kegelschnitt; und zwar gehört dieser demselben Systeme an, wie der Punct π. — Folgt unmittelbar aus [544], wenn man die drei Puncte $a\ b\ c$ zusammenfallen lässt. (*Hesse* l. c. [540] pag. 176.)

554. Sind $a\ b\ c$ die Berührungspuncte eines Kegelschnitts mit der Curve, und π der Berührungspunct eines demselben Systeme angehörigen und die Curve sechspunctig berührenden Kegelschnittes, so hat derjenige Kegelschnitt, welcher durch $a\ b\ c$ geht und die Curve in π berührt, in π eine dreipunctige Berührung. — Aus [545], da $a\ b\ c$ und π (drei mal genommen) sechs Puncte sind, in denen zwei dem nämlichen Systeme angehörige Kegelschnitte die Curve berühren.

555. Sind $a\ b\ c$ drei nicht in gerader Linie liegende Curvenpuncte, deren Tangentialpuncte aber auf einer Geraden sich befinden, so dass die Seiten des Dreiecks $a\ b\ c$ die Curve in drei in gerader Linie liegenden Puncten treffen [390], so giebt es neun durch $a\ b\ c$ gehende Kegelschnitte, welche die

Curve dreipunctig berühren, und die Berührungspuncte sind die neun Puncte π, welche demselben Systeme angehören, wie der Kegelschnitt, der die Curve nach [542] in $a\ b\ c$ berührt. — Denn soll der durch $a\ b\ c$ gelegte Kegelschnitt die Curve dreipunctig berühren, so müssen die drei Schnittpuncte desselben mit der Curve in einen zusammenfallen. Diese Schnittpuncte aber sind nach [544] die Berührungspuncte eines demselben System angehörigen Kegelschnittes; daher muss der dreipunctige Berührungspunct einer der Puncte π sein. (*Hesse* l. c. [540] pag. 176.)

Zwölfter Abschnitt.

Kegelschnitte, welche eine Curve dritter Ordnung dreipunctig berühren (osculiren).

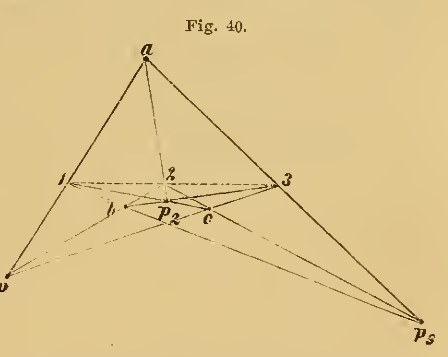
§. 1.

556. Zieht man aus einem beliebigen Curvenpuncte p Strahlen nach den neun Wendepuncten, so sollen die neun Puncte, in denen diese Strahlen die Curve treffen, (oder in denen die Wendepuncte von p aus auf die Curve projicirt werden) zusammengefasst eine Inflexionsgruppe genannt werden. Eine solche ist jedenfalls bestimmt, sobald einer ihrer Puncte z. B. a, und ein Wendepunct, z. B. 1, gegeben ist, denn zieht man $a\,1$, so erhält man den Projectionsmittelpunct p, und die aus p nach den acht übrigen Wendepuncten gehenden Strahlen liefern die anderen Puncte der Inflexionsgruppe; wir werden aber später [571] sehen, dass der Wendepunct 1 nicht gegeben zu sein braucht, sondern dass jeder andere an seine Stelle treten kann, ohne dass die Gruppe sich ändert. — Da bei einer Curve ohne Doppelpunct niemals zwei Wendepuncte zusammenfallen, so fallen auch niemals zwei Puncte einer Inflexionsgruppe zusammen; denn dies könnte nur dann eintreten, wenn der Projectionsmittelpunct p mit zwei Wendepuncten in gerader Linie liegt; dann aber ist p selbst ein Wendepunct [352], und es zeigt sich in diesem Falle, dass die neun Wendepuncte selbst eine Inflexionsgruppe bilden.

557. Solche drei Puncte einer Inflexionsgruppe, welche die Projectionen von drei in gerader Linie liegenden Wendepuncten bilden, sollen ein Inflexionstripel heissen. Drei in gerader Linie liegende Wendepuncte aber mögen zusammengefasst der Kürze wegen eine Inflexionsgerade genannt werden. Aus der Art, wie die Wendepuncte zu je drei auf Inflexionsgeraden vertheilt sind [353], folgt dann: Die neun Puncte einer Inflexionsgruppe bilden 12 Inflexionstripel, indem sie sich auf vier verschiedene Arten in drei Tripel zerlegen lassen. Jeder Punct der Inflexionsgruppe gehört gleichzeitig vier verschiedenen in dieser Gruppe enthaltenen Tripeln an, und greift man irgend acht Puncte einer Gruppe heraus, so theilen sich diese in vier Paare, der Art dass jedes Paar mit dem neunten Punct der Gruppe ein Tripel bildet. Von vier Tripeln, welche einen reellen Punct gemeinschaftlich haben, ist nur ēines reell. Da es 12 Inflexionsgerade giebt, so scheint es, dass jeder Curvenpunct gleichzeitig 12 Tripeln angehören müsste, es wird sich aber zeigen [573], dass nur vier unter diesen von einander verschieden sind.

558. Seien (Fig. 40) 1 2 3 drei in gerader Linie liegende Wendepuncte, p ein beliebiger Curvenpunct, und die Strahlen $p1$, $p2$, $p3$ mögen die Curve in den Puncten des Tripels $a\ b\ c$ treffen. Zieht man nun aus einem dieser Puncte, z. B. aus a, Strahlen nach den beiden Wendepuncten 2 und 3, aus denen a nicht abgeleitet ist, so erhält man zwei neue Puncte p_2 und p_3 von der Eigenschaft, dass die von ihnen nach den Wendepuncten 1 2 3 gehenden Strahlen wieder die frühern Puncte $a\ b\ c$ (abgesehen von der Ordnung) treffen.

Fig. 40.



Beweis. Man hat hier drei durch den Wendepunct 2 gehende Strahlen 1 2 3, $p\ 2\ b$, $a\ 2\ p_2$. Von den sechs Schnittpuncten derselben mit der Curve 1 3 $p\ b\ a\ p_2$ liegen aber der Annahme nach drei, nämlich 1 $p\ a$, in einer Geraden, mithin

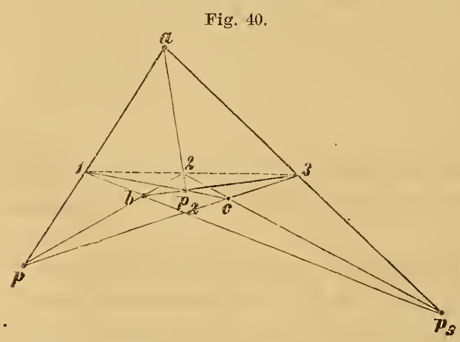
[347] auch die drei übrigen $3\,b\,p_2$, d. h. der Strahl $p_2\,3$ geht durch b. Nun hat man auch drei durch den Wendepunct 3 gehende Strahlen: $3\,2\,1$, $3p_2b$, $3pc$, und von den sechs Schnittpuncten $2\,1\,p_2bpc$ liegen wieder drei: $2bp$ in einer Geraden, also auch die drei übrigen $1p_2c$, d. h. $p_2 1$ trifft die Curve in c. Da sich nun ebenso beweisen lässt, dass die Strahlen $p_3 3$, $p_3 1$, $p_3 2$ die Curve resp. in a, b, c treffen, so erhält man folgende neun Gerade

$p\ 1\ a$	$p_2\ 2\ a$	$p_3\ 3\ a$
$p\ 2\ b$	$p_2\ 3\ b$	$p_3\ 1\ b$
$p\ 3\ c$	$p_2\ 1\ c$	$p_3\ 2\ c.$

Daher haben die Puncte $p\,p_2\,p_3$ die Eigenschaft, dass jeder von ihnen die Wendepuncte 123 in dem nämlichen Tripel abc projicirt. Ausserdem aber zeigt sich, dass $p\,p_2\,p_3$ gleichzeitig die Projectionen der nämlichen drei Wendepuncte 1 2 3 aus jedem der drei Puncte des Tripels $a\,b\,c$ sind. Also bilden $p\,p_2\,p_3$ selbst ein Tripel, welches durch die Wendepuncte 1 2 3 in der Weise mit dem ersteren Tripel $a\,b\,c$ verbunden ist, dass das eine aus dem anderen entsteht, wenn man die zugehörigen Wendepuncte aus irgend einem Puncte des anderen projicirt. Zwei auf diese Weise von einander abhängige Tripel sollen c o n n e x e I n f l e x i o n s t r i p e l genannt werden. (Mittheilung von Herrn Prof. *Küpper.*)

Man findet nach dem obigen Schema die durch die Wendepuncte hindurchgehenden Verbindungslinien der Puncte des einen Tripels mit denen des anderen, wenn man die Puncte des einen Tripels $a\,b\,c$ in ihrer Reihenfolge ungeändert lässt und die Wendepuncte cyclisch mit einander vertauscht.

Fig. 40.



559. (Fig. 40.) Wenn drei Puncte $a\,b\,c$ ein Inflexionstripel bilden, so liegt der Tangentialpunct eines jeden auf der Verbindungslinie der beiden anderen, d. h. diese Verbindungslinie trifft die Curve

in demselben Puncte, wie die Tangente des ersteren Tripelpunctes.

Beweis. Seien 1 2 3 die Wendepuncte, aus denen das gegebene Tripel abgeleitet ist, und sei $p\,p_2\,p_3$ das dazu gehörige connexe Tripel [558]. Das in c sich schneidende Geradenpaar $p3$, $p_2 1$ bildet einen durch die vier Puncte $pp_2 1 3$ gehenden Kegelschnitt, der in c die Curve in zwei zusammenfallenden Puncten trifft. Die Tangente in c geht also [244 Zus.] durch den den vier Puncten $p\,p_2 1 3$ gegenüberliegenden Punct c', der mithin der Tangentialpunct von c ist. Nun ist aber das Geradenpaar $p\,1$, $p_2\,3$ ebenfalls ein durch die nämlichen vier Puncte gehender Kegelschnitt, welcher die Curve in a und b trifft. Folglich geht die Gerade ab auch durch c'. Für die beiden anderen Puncte ist der Beweis ebenso zu führen. (Mitth. von Herrn Prof. *Küpper.*)

560. Da jeder Punct einer Inflexionsgruppe gleichzeitig vier verschiedenen in der Gruppe enthaltenen Inflexionstripeln angehört, so folgt: wenn man irgend acht Puncte einer Gruppe in die vier Paare theilt, welche mit dem neunten je ein Tripel bilden [557], so laufen deren vier Verbindungslinien in demselben Curvenpuncte zusammen, nämlich in dem Tangentialpuncte des neunten Punctes der Gruppe. Demnach geht eine Gerade, welche den Tangentialpunct eines Punctes der Gruppe mit einem zweiten verbindet, stets noch durch einen dritten Punct derselben. Die Eigenschaft der Wendepuncte, dass die Verbindungslinie von zweien derselben allemal durch einen dritten Wendepunct geht, ist, wie man sieht, ein specieller Fall des Vorigen. Da ausserdem niemals zwei Puncte einer Inflexionsgruppe zusammenfallen, so folgt, dass niemals zwei derselben Inflexionsgruppe angehörige Puncte einen gemeinschaftlichen Tangentialpunct haben können.

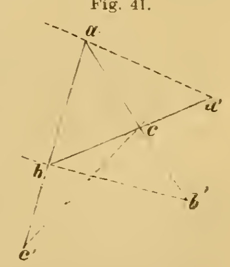


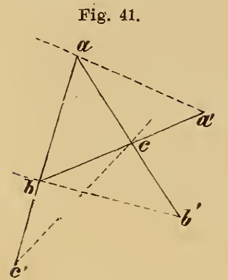
Fig. 41.

561. (Fig. 41.) Wenn von drei Puncten $a\;b\;c$ einer Curve 3. O. zwei die Eigenschaft haben, dass ihre Tangentialpuncte auf den Verbindungslinien der beiden anderen liegen, so hat auch der dritte Punct diese Eigenschaft.

Beweis. Seien a' und b' die Tangentialpuncte von a

und b, und liege a' auf bc, b' auf ca. Schneidet man die Curve mit ab in c', so ist dieser Punct der gegenüberliegende zu $aba'b'$ [239], denn da $a'a$ und $b'b$ Tangenten sind, so trifft der aus diesen Geraden bestehende Kegelschnitt die Curve zum fünften und sechsten Male in a und b. Aber das Geradenpaar ab', $a'b$ geht ebenfalls durch die vier Puncte $aba'b'$ und trifft die Curve in c in zwei zusammenfallenden Puncten, mithin geht die Tangente in c durch c'. (Mitth. von Herrn Prof. *Küpper*.)

Fig. 41.



562. Wenn ein Kegelschnitt eine Curve 3. O. in einem Puncte a dreipunctig berührt (osculirt) und ausserdem in $q\ r\ s$ schneidet, so ist der den vier Puncten $q\ r\ s\ a$ gegenüberliegende Punct der Tangentialpunct von a. — Denn der in a osculirende Kegelschnitt des Büschels $[q\ r\ s\ a]$ trifft die Curve zum fünften und sechsten Male in a, daher ist die Verbindungslinie dieser beiden Puncte die Tangente in a [239].

563. Wenn vier Curvenpuncte $q\ r\ s\ a$ so liegen, dass ihr gegenüberliegender Punct der Tangentialpunct des einen z. B. a ist, so giebt es einen Kegelschnitt, der die Curve in a osculirt und in $q\ r\ s$ schneidet. — Denn da die Tangente in a die Curve hier in zwei zusammenfallenden Puncten trifft, so giebt es einen Kegelschnitt des Büschels $[q\,r\,s\,a]$, der in a noch zwei, also im Ganzen drei, Puncte mit der Curve gemein hat.

564. Wenn drei Curvenpuncte $a\ b\ c$ die Eigenschaft haben, dass der Tangentialpunct eines jeden auf der Verbindungslinie der beiden anderen liegt, und legt man durch einen von ihnen, z. B. a, einen Kegelschnitt, der die Curve in a osculirt und ausserdem in $q\ r\ s$ schneidet, so geht durch die letzteren drei Puncte auch ein Kegelschnitt, der die Curve in b, und einer, der sie in c osculirt.

Beweis. Seien $a'b'c'$ die Tangentialpuncte von abc, dann ist a' der gegenüberliegende Punct zu $q\ r\ s\ a$ [562]. Nun geht aber der Annahme nach bc durch a' hindurch, also liegen bc mit $qrsa$ in einem neuen Kegelschnitte [244, Zus.]. Betrachtet man diesen als einem Büschel $[q\ r\ s\ b]$ angehörig,

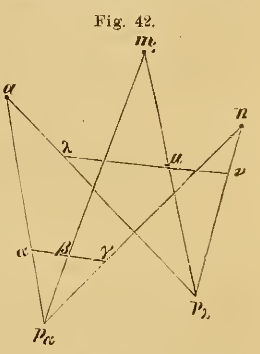
so trifft die Gerade ca die Curve in dem gegenüberliegenden Puncte von $q\ r\ s\ b$. Dieser Durchschnittspunct aber ist der Annahme nach b', der Tangentialpunct von b. Mithin [563] giebt es einen Kegelschnitt, der die Curve in b osculirt und in $q\ r\ s$ schneidet. Ebenso kann der Beweis für c geführt werden.

Zusatz. Lässt man die Puncte $q\ r\ s$ in einen p zusammenfallen, sodass ein Kegelschnitt die Curve gleichzeitig in p und a osculirt, (dies tritt ein [348], wenn p der Durchschnitt der Curve mit einer durch a und einen Wendepunct gezogenen Geraden ist) so folgt, dass dann auch ein zweiter Kegelschnitt in p und b, und ein dritter in p und c osculirt. (Mitth. von Herrn Prof. *Küpper.*)

565. Wenn drei Curvenpuncte $a\ m\ n$ die Eigenschaft haben, dass der Tangentialpunct eines jeden auf der Verbindungslinie der beiden anderen liegt, so bilden diese drei Puncte ein Inflexionstripel.

Beweis. (Fig. 42.) Verbindet man a mit einem beliebigen Wendepuncte α durch eine Gerade, welche die Curve in p_α treffe, so wird die Curve von einem Kegelschnitte in p_α und a osculirt [348]. Mithin [564] giebt es einen zweiten Kegelschnitt, der in p_α und m, und einen dritten, der in p_α und n osculirt; dann aber treffen die Geraden $p_\alpha m$ und $p_\alpha n$ die Curve jede in einem Wendepuncte β und γ [349]. Folglich gehören m und n zu der Inflexionsgruppe, welche durch a und den Wendepunct α bestimmt ist [556]. Die drei Wendepuncte $\alpha\ \beta\ \gamma$ aber müssen

Fig. 42.



in einer Geraden liegen; denn wäre nicht γ, sondern etwa δ der mit $\alpha\ \beta$ in einer Geraden liegende Wendepunct, und bezeichnet d den Punct, in welchem der Strahl $p_\alpha \delta$ die Curve trifft, so gehört auch d jener Inflexionsgruppe an, und $a\,m\,d$ würden ein Tripel bilden. Der Tangentialpunct von d müsste daher auf $a\,m$ liegen [559]; aber auf $a\,m$ befindet sich der Annahme nach der Tangentialpunct von n. Also müssten die Tangentialpuncte von d und n zusammenfallen, was nicht möglich ist [560]. Demnach sind $a\ m\ n$ die Projectionen (aus p_α) dreier

in gerader Linie liegender Wendepuncte $\alpha\,\beta\,\gamma$, und bilden also ein Inflexionstripel.

566. Bilden drei Puncte $a\,b\,c$ ein Inflexionstripel, so haben ihre drei Tangentialpuncte $a'b'c'$ dieselbe Eigenschaft.

Beweis. Nach [559] liegen $a'b\,c$, $b'c\,a$, $c'a\,b$ in je einer Geraden. Sind nun aber $a''b''c''$ die Tangentialpuncte von $a'b'c'$, so sind $a''b'c'$, $a'b''c'$, $a'b'c''$ die Tangentialpuncte von resp. $a'b\,c$, $a\,b'c$, $a\,b\,c'$ und liegen daher wie diese in je einer Geraden [230]; mithin bilden $a'b'c'$ nach [565] ein Tripel. (Mitth. von Herrn Prof. *Küpper.*)

567. Zieht man aus jedem der drei Puncte eines Tripels $a\,b\,c$ die vier Tangenten an die Curve mit den Berührungspuncten $a_1\,a_2\,a_3\,a_4$, $b_1\,b_2\,b_3\,b_4$, $c_1\,c_2\,c_3\,c_4$, so bilden diese zwölf Puncte vier Tripel, indem jeder Berührungspunct c mit je einem und nur je einem der Puncte a und b ein Tripel bildet.

Beweis. Sind $a'b'c'$ die Tangentialpuncte von $a\,b\,c$, so liegen $a'\,b\,c$ in gerader Linie, verbindet man also a mit einem der Berührungspuncte b, etwa b_h, so trifft diese Gerade einen der Berührungspuncte c [383]; dieser sei mit c_h bezeichnet, sodass

$$a\,b_h\,c_h$$

eine Gerade bilden. Nun liegen auch $a\,b'\,c$ in einer Geraden, also trifft die Gerade $b\,c_h$ einen der Berührungspuncte a, der mit a_h bezeichnet werde, sodass auch

$$a_h\,b\,c_h$$

eine Gerade bilden. Demnach haben $a_h\,b_h\,c_h$ die Eigenschaft, dass der Tangentialpunct a von a_h auf $b_h\,c_h$, und der Tangentialpunct b von b_h auf $a_h c_h$ liegt. Folglich [561] liegt auch der Tangentialpunct c von c_h auf $a_h b_h$, und $a_h b_h c_h$ bilden ein Tripel [565]. — Dieses aber ist das einzige aus den Berührungspuncten bestehende Tripel, welchem der Punct c_h angehört. Denn bilden $a_x\,b_y\,c_h$ ein solches, so liegen $a\,b_y\,c_h$ und $a_x\,b\,c_h$ in je einer Geraden; die Puncte aber, in denen die Geraden $a c_h$ und $b c_h$ die Curve treffen, sind nach dem Obigen b_h und a_h, also fällt a_x mit a_h, und b_y mit b_h zusammen.

568. Wenn ein Kegelschnitt die Curve in einem Puncte

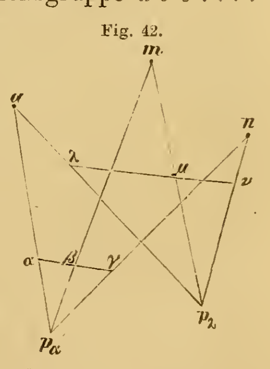
a eines Tripels $a\ b\ c$ osculirt und ausserdem in $q\ r\ s$ schneidet, so liegen $q\ r\ s$ mit $a\ b\ c$ in einen neuen Kegelschnitte. — Denn der den vier Puncten $q\ r\ s\ a$ gegenüberliegende Punct ist der Tangentialpunct a' von a [562], aber $b\ c$ geht auch durch a' hindurch [559], also liegen $b\ c$ auf einem Kegelschnitte des Büschels $[q\ r\ s\ a]$ [244 Zus.].

569. Legt man durch die Puncte eines Tripels $a\ b\ c$ einen beliebigen Kegelschnitt, der die Curve ausserdem in $q\ r\ s$ schneidet, so geht durch $q\ r\ s$ ein Kegelschnitt, der in a, ein zweiter, der in b, und ein dritter, der in c osculirt. — Denn schneidet $b\ c$ die Curve in a', so liegt a' den vier Puncten $q\ r\ s\ a$ gegenüber; er ist aber, weil $a\ b\ c$ ein Tripel bilden, zugleich der Tangentialpunct von a [559], mithin osculirt ein durch $q\ r\ s$ gehender Kegelschnitt die Curve in a [563]. Ebenso ist der Beweis für b und c zu führen.

Zusatz. Fallen $q\ r\ s$ in einen Punct p zusammen, so folgt: Geht ein Kegelschnitt durch die Puncte eines Tripels $a\ b\ c$ und osculirt gleichzeitig in p, so giebt es drei Kegelschnitte, die in p und a, in p und b, und in p und c osculiren; und daraus folgt weiter [349]: Trifft ein in p osculirender Kegelschnitt die Curve in drei Puncten eines Tripels $a\ b\ c$, so gehen die Strahlen $p\ a$, $p\ b$, $p\ c$ durch drei Wendepuncte, welche auch in gerader Linie liegen, weil sonst $a\ b\ c$ nicht ein Tripel bilden würden.

570. (Fig. 42.) Es sei eine Inflexionsgruppe $a\ b\ c \ldots i$ durch einen ihrer Puncte z. B. a und durch einen beliebigen Wendepunct α bestimmt, indem der Punct p_α, in welchem $a\,\alpha$ die Curve trifft, der zugehörige Projectionsmittelpunct sei. Zieht man nun aus a eine Gerade durch irgend einen anderen Wendepunct λ und schneidet damit die Curve in p_λ, so treffen die aus p_λ nach den neun Wendepuncten gehenden Strahlen die Curve (abgesehen von der Ordnung) in den nämlichen neun Puncten $a\ b\ c \ldots i$, wie die von p_α ausgehenden Strahlen.

Fig. 42.

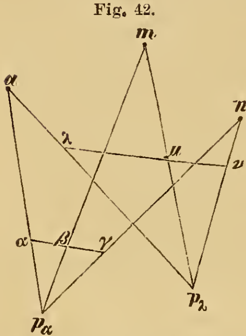


Beweis. Ist μ irgend ein Wendepunct, und trifft $p_\lambda\,\mu$ die Curve in m, so ist zu beweisen, dass m mit einem der

Puncte $a\ b\ c\ \ldots\ i$ zusammenfällt. Dies ist zunächst klar, wenn μ auf λ fällt, denn dann fällt m auf a. Ist aber μ von λ verschieden, so giebt es einen Wendepunct ν, der mit $\lambda\ \mu$ in einer Geraden liegt [352]. Trifft dann der Strahl $p_\lambda\ \nu$ die Curve in n, so bilden $a\ m\ n$ ein Tripel. Mithin [559] haben diese drei Puncte die Eigenschaft, dass der Tangentialpunct eines jeden auf der Verbindungslinie der beiden anderen liegt. Dann aber ist in [565] bewiesen, dass wenn $a\ \alpha\ p_\alpha$ gezogen wird, (wo α jeder beliebige Wendepunct sein kann), die Geraden $p_\alpha m$ und $p_\alpha n$ durch zwei Wendepuncte β und γ hindurchgehen, welche mit α in einer Geraden liegen. Mithin gehört sowohl m als auch n der Inflexionsgruppe $a\ b\ c\ \ldots\ i$ an.

Bemerkung. Wenn von den Puncten $\alpha\ \beta\ \gamma$ einer mit einem der Puncte $\lambda\ \mu\ \nu$ zusammenfällt, so fallen die ersteren drei alle auf die letzteren drei. — Um dies zu beweisen, sei ξ der Wendepunct, der beiden Inflexionsgeraden gemeinschaftlich ist, und x der Durchschnitt des Strahls $p_\alpha\ \xi$ mit der Curve, sodass x einer der Puncte $a\ m\ n$ ist. Zieht man aus x Strahlen nach $\lambda\ \mu\ \nu$ und schneidet damit die Curve in $x_\lambda\ x_\mu x_\nu$, so ist p_α einer dieser drei Puncte, weil einer der von x nach λ, μ, ν gehenden Strahlen auch mit einer der drei Geraden $a\alpha, m\beta, n\gamma$ zusammenfällt. Nun bilden $x_\lambda\ x_\mu x_\nu$ mittelst der Wendepuncte $\lambda\ \mu\ \nu$ das zu $a\ m\ n$ connexe Tripel, daher [558] gehen die von jedem der drei Puncte $x_\lambda\ x_\mu x_\nu$, und also auch von p_α, nach $a\ m\ n$ führenden Strahlen durch $\lambda\ \mu\ \nu$, mithin fallen $\alpha\ \beta\ \gamma$ mit $\lambda\ \mu\ \nu$ zusammen. Es kann demnach nur einer der beiden Fälle stattfinden: entweder fallen die beiden Inflexionsgeraden $\lambda\ \mu\ \nu$ und $\alpha\ \beta\ \gamma$ ganz zusammen, oder sie haben keinen Wendepunct gemeinschaftlich.

Fig. 42.



571. In Folge des vorigen Satzes ist eine Inflexionsgruppe $a\ b\ c\ \ldots\ i$ durch einen ihrer Puncte, a, schon vollkommen bestimmt, sodass jeder Curvenpunct einer und nur einer einzigen Inflexionsgruppe angehört; denn zieht man aus a Strahlen nach den neun Wendepuncten und schneidet damit die Curve in $p_1\ p_2\ \ldots\ p_9$, so werden die Wendepuncte aus

jedem dieser Puncte p in der nämlichen Inflexionsgruppe projicirt. Diese Puncte p bilden dann selbst eine Inflexionsgruppe, die nun ihrerseits wieder aus jedem der Puncte $a\ b\ c \ldots i$ als Projectionsmittelpunct entsteht. Die beiden Gruppen $a\ b\ c \ldots i$ und $p_1\ p_2 \ldots p_9$ sind daher in dem Sinne von [558] mit einander connex. Die 81 Geraden, welche entstehn, wenn man jeden Punct der einen Gruppe mit jedem der anderen verbindet, schneiden sich also zu je neun in den neun Wendepuncten.

572. Wenn ein Punct, a, einer Inflexionsgruppe der Berührungspunct einer von einem Wendepuncte, 1, ausgehenden Tangente ist, so fällt p mit a zusammen, daher fällt auch die connexe Gruppe ganz auf die ursprüngliche. Jeder Punct der Gruppe hat dann die nämliche Eigenschaft wie a, nämlich jeder hat einen Wendepunct zu seinem Tangentialpunct; denn ist $a\ b\ c$ irgend ein in der Gruppe enthaltenes Tripel, entstanden durch den Projectionsmittelpunct $p (= a)$ und die Wendepuncte 1 2 3, so geht jetzt a 2 durch b, und a 3 durch c, ausserdem liegt 1 als Tangentialpunct von a auf $b\ c$, also liegen 1 2 3 resp. auf $b\ c$, $a\ b$, $c\ a$ und sind daher [559] die Tangentialpuncte von resp. a, c, b. Jeder Punct der Gruppe aber gehört mit a zu irgend einem in der Gruppe enthaltenen Tripel*).

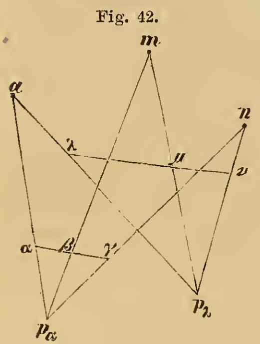
573. Da nach [571] ein gegebener Curvenpunct nur einer einzigen Inflexionsgruppe angehört, so kann derselbe auch nur solchen Tripeln angehören, welche in dieser Gruppe enthalten sind. Daher gehört jeder Curvenpunct gleichzeitig nur vier verschiedenen Tripeln an, und von den zwölf Tripeln, welche wegen der zwölf Inflexionsgeraden denkbar sind, sind nur vier von einander verschieden. In der That lässt sich leicht beweisen, dass jedes Tripel gleichzeitig durch drei verschiedene Inflexionsgerade erzeugt werden kann, und zwar durch solche drei, von denen keine zwei einen Wendepunct gemeinschaftlich haben, die also zusammen alle neun Wendepuncte enthalten.

---

*) In diesem Falle sind die Puncte der Inflexionsgruppe neun demselben Systeme angehörige Puncte π. [548.]

Beweis. (Fig. 42.) Ist $a\ m\ n$ ein Tripel, erzeugt durch die Inflexionsgerade $\lambda\ \mu\ \nu$ und den Projectionsmittelpunct p_λ, und ist α ein von $\lambda\ \mu\ \nu$ verschiedener Wendepunct, so giebt es nach [570] eine zweite ganz von $\lambda\ \mu\ \nu$ verschiedene Inflexionsgerade $\alpha\ \beta\ \gamma$, die das nämliche Tripel $a\ m\ n$ aus dem Projectionsmittelpuncte p_α erzeugt. Ist dann ferner δ ein neuer von $\lambda\ \mu\ \nu$ und $\alpha\ \beta\ \gamma$ verschiedener Wendepunct, so giebt es ebenso noch eine dritte von den beiden vorigen verschiedene Inflexionsgerade $\delta\ \varepsilon\ \varkappa$, die das gegebene Tripel ebenfalls erzeugt. Es giebt aber auch nicht mehr, als diese drei Geraden; denn ist α einer der Puncte $\lambda\ \mu\ \nu$, so erhält man nach [570] keine neue Gerade. Wählt man aber statt α irgend einen anderen von $\lambda\ \mu\ \nu$ verschiedenen Wendepunct, so gehört derselbe nothwendig einer der beiden Inflexionsgeraden $\alpha\ \beta\ \gamma$ oder $\delta\ \varepsilon\ \varkappa$ an, und liefert daher ebenfalls keine neue Gerade.

Fig. 42.



Zusatz. Da einem Tripel in Verbindung mit einer Inflexionsgeraden, aus der es entsteht, stets ein connexes Tripel zugehört, so folgt dass jedes Inflexionstripel drei mit ihm connexe Tripel besitzt. Die neun Puncte dieser connexen Tripel bilden dann zusammen die connexe Inflexionsgruppe zu der, welcher das gegebene Tripel angehört. Demnach kann für ein in einer Inflexionsgruppe enthaltenes Tripel jeder Punct der connexen Gruppe als Projectionsmittelpunct dienen; und umgekehrt: von jedem Puncte der connexen Gruppe gehen die Strahlen, welche nach den Puncten eines in der ursprünglichen Gruppe enthaltenen Tripels führen, durch drei in gerader Linie liegende Wendepuncte.

574. Um nun vollständig übersehen zu können, wie die Puncte einer Inflexionsgruppe mit denen der connexen Gruppe durch die einzelnen Wendepuncte 1 2 3 4 5 6 7 8 9 verknüpft sind, gehen wir von irgend einem Curvenpuncte a und einem Wendepuncte 1 aus, schneiden die Curve mit a 1 in p_1 und bezeichnen die Puncte nach welchen die Strahlen

$$p_1(1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9)$$

führen, der Reihe nach mit

$$a\ b\ c\ d\ e\ f\ g\ h\ i;$$

und die Puncte, in welchen die Strahlen

$$a(1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9)$$

die Curve treffen, mit

$$p_1\ p_2\ p_3\ p_4\ p_5\ p_6\ p_7\ p_8\ p_9.$$

Es entsteht dann die Aufgabe, wenn irgend einer der Puncte p und irgend ein Wendepunct gegeben ist, den Punct anzugeben, in welchem die Verbindungslinie beider die Curve trifft. Dazu bedienen wir uns in Beziehung auf die Vertheilung der Wendepuncte auf die Inflexionsgeraden der in [354] gewählten Bezeichnung, nach welcher die Inflexionsgeraden folgende sind:

123	147	159	168
456	258	267	249
789	369	348	357.

Man muss nun unterscheiden, ob der gegebene Wendepunct der Punct 1 oder ein anderer ist. Ist 1 gegeben und ausserdem beispielsweise p_5, so suche man den Wendepunct, der mit 15 in einer Geraden liegt; dieser ist 9; und bestimme die Puncte, zu welchen die Strahlen $p_1(1\ 5\ 9)$ führen: $a\ e\ i$. Dann bilden die Puncte $p_1\ p_5\ p_9$, nach denen die Strahlen $a(1\ 5\ 9)$ hingehen, das mit $a\ e\ i$ connexe Tripel. Man kann daher das Schema aufstellen:

Tripel	a	e	i
Inflexionsgerade	1	5	9
Connexes Tripel	p_1	p_5	p_9.

Diese neun Puncte liegen nun nach der in [558] gegebenen Regel auf folgenden neun Geraden

$$\begin{matrix} p_1\,1\,a & p_5\,5\,a & p_9\,9\,a \\ p_1\,5\,e & p_5\,9\,e & p_9\,1\,e \\ p_1\,9\,i & p_5\,1\,i & p_9\,5\,i; \end{matrix}$$

mithin führt $p_5\,1$ nach i.

Für den zweiten Fall, dass der gegebene Wendepunct von 1 verschieden ist, sei derselbe beispielsweise 3, und der gegebene Punct p sei wieder p_5. Dann sucht man den Wendepunct, der mit 35 in einer Geraden liegt: 7, und zugleich

die beiden Inflexionsgeraden, die von der vorigen 357 vollständig verschieden sind, nämlich 168 und 249. Von diesen enthält eine den Wendepunct 1, hier 168. (Eine Ausnahme hievon tritt nur ein, wenn die beiden an Stelle von 3 und 5 in Betracht kommenden Wendepuncte mit 1 in gerader Linie liegen; dann aber kann sofort das Verfahren des ersten Falles in Anwendung kommen.) Nun gehen die Strahlen p_1(1 6 8) durch *a f h*. Das nämliche Tripel wird aber [573] auch durch die Inflexionsgeraden 357 und 249 erzeugt; zu Projectionsmittelpuncten kann man beidemal jeden der Puncte wählen, die mit *a f h* connexe Tripel bilden, man wird aber diese Wahl so treffen, dass bei der einen Geraden der gegebene Punct p_5 Projectionsmittelpunct ist, und bei der anderen der Punct, der mit p_1 und p_5 ein Tripel bildet, also hier p_9. Man hat dann folgendes Schema:

Tripel	*a f h*	*a f h*	*a f h*
Inflexionsgerade	1 6 8	3 5 7	2 4 9
Projectionsmittelpunct	p_1	p_5	p_9

Da nun in der zweiten Gruppe dieses Schema's p_5 5 nach *a* geht, so hat man nur noch zu entscheiden, ob p_5 3 nach *f* oder nach *h* führt. Zu dem Ende betrachten wir auch das Tripel $p_1\ p_5\ p_9$. Dieses entsteht ebenfalls durch drei Inflexionsgeraden, nämlich zuerst durch 1 5 9, und dann durch die beiden von diesen vollständig verschiedenen Geraden d. i. 2 6 7 und 3 4 8. Bei der ersten ist *a* Projectionsmittelpunct, bei der zweiten und dritten aber *f* und *h*, weil p_1 6 und p_1 8 nach diesen Puncten führen. Man hat also noch ein zweites Schema, nämlich:

Tripel	$p_1\ p_5\ p_9$	$p_1\ p_5\ p_9$	$p_1\ p_5\ p_9$
Inflexionsgerade	1 5 9	2 6 7	3 4 8
Projectionsmittelpunct	*a*	*f*	*h*,

und darin liefert die letzte Gruppe die Entscheidung, dass p_5 3 nach *h* führt.

575. Nach dem Vorigen kann man nun leicht eine Tabelle entwerfen, welche die Verknüpfung der Puncte der beiden Inflexionsgruppen mit den Wendepuncten vollständig darstellt. Dabei liefert die Anwendung des angegebenen Verfahrens immer gleichzeitig mehrere Bestimmungen. Die Tabelle

wird aber noch beträchtlich leichter hergestellt, wenn man bemerkt, dass vermöge der für die Wendepuncte gewählten Bezeichnung die drei Tripel *a b c*, *d e f*, *g h i* jedes durch die Inflexionsgeraden 1 2 3, 4 5 6, 7 8 9 entsteht, und dass ferner zu jedem die drei folgenden $p_1\,p_2\,p_3$, $p_4\,p_5\,p_6$, $p_7\,p_8\,p_9$ als connexe Tripel zugehören. Denn dies hat zur Folge, dass die Puncte jedes der obigen drei Tripel immer beisammen bleiben und sich nur cyclisch unter einander vertauschen. Man gelangt hiedurch zu einer vollständigen Uebersicht, die in der folgenden leicht verständlichen Tabelle dargestellt ist:

	1 2 3	4 5 6	7 8 9
p_1	*a b c*	*d e f*	*g h i*
p_2	*c a b*	*f d e*	*i g h*
p_3	*b c a*	*e f d*	*h i g*
p_4	*g h i*	*a b c*	*d e f*
p_5	*i g h*	*c a b*	*f d e*
p_6	*h i g*	*b c a*	*e f d*
p_7	*d e f*	*g h i*	*a b c*
p_8	*f d e*	*i g h*	*c a b*
p_9	*e f d*	*h i g*	*b c a*

576. Irgend zwei Inflexionstripel, welche connexen Inflexionsgruppen angehören, liegen allemal in einem Kegelschnitt.

B e w e i s. Ist *a b c* ein der einen Gruppe angehöriges Tripel, und p_λ irgend ein Punct der connexen Gruppe, so gehen die Strahlen $p_\lambda(a\,b\,c)$ durch drei in gerader Linie liegende Wendepuncte [573], und folglich [232] giebt es einen Kegelschnitt, der durch *a b c* geht und in p_λ osculirt. Bilden dann p_μ, p_ν mit p_λ ein Tripel, so liegen $p_\lambda\,p_\mu\,p_\nu$ nach [568] mit *a b c* in einem Kegelschnitt.

577. Wenn zwei Inflexionstripel *a b c* und *x y z* in einem Kegelschnitte liegen, so gehören sie connexen Inflexionsgruppen an.

B e w e i s. Da durch das Tripel *x y z* ein Kegelschnitt geht, der in *a b c* schneidet, so giebt es drei durch *a b c* gehende Kegelschnitte, die resp. in *x*, *y* und *z* osculiren [569]; da aber *a b c* selbst ein Tripel bilden, so treffen die von *x*, *y*

und z nach $a\ b\ c$ führenden Strahlen die Curve in Wendepuncten [569 Zus.], und folglich gehören $a\ b\ c$ und $x\ y\ z$ connexen Inflexionsgruppen an.

§. 2.

578. Legt man durch einen beliebigen Curvenpunct a einen in a osculirenden Kegelschnitt, der die Curve ausserdem in $q\ r\ s$ schneidet, so sind die acht Puncte, welche mit a zusammen eine Inflexionsgruppe bilden, ebenfalls Osculationspuncte für Kegelschnitte, die durch $q\ r\ s$ hindurch gehen. — Denn diese acht Puncte zerfallen in vier Paare, von denen jedes mit a ein Inflexionstripel bildet [557]. Jeder Punct aber der mit a zu einem Tripel gehört, ist Osculationspunct für einen durch $q\ r\ s$ gehenden Kegelschnitt [559, 564].

Bemerkung. Wenn die Puncte a und $q\ r\ s$ reell sind, so sind von diesen neun osculirenden Kegelschnitten nur drei reell, weil a nur einem reellen Tripel angehört [557].

579. Wenn ein in a osculirender Kegelschnitt die Curve in $q\ r\ s$ schneidet, so giebt es keine anderen durch $q\ r\ s$ gehenden osculirenden Kegelschnitte, als diejenigen, deren Osculationspuncte mit a zu derselben Inflexionsgruppe gehören.

Beweis. Sei x der Osculationspunct irgend eines durch $q\ r\ s$ gehenden und osculirenden Kegelschnittes, a' und x' die Tangentialpuncte von a und x. Dann ist [562]

a' der gegenüberliegende Punct zu $q\ r\ s\ a$
x' „ „ „ „ $q\ r\ s\ x$.

Betrachtet man nun den durch $q\ r\ s\ a\ x$ gehenden Kegelschnitt, der die Curve zum sechsten Male in y schneiden möge, einmal als dem Büschel $[q\ r\ s\ a]$ und dann als dem Büschel $[q\ r\ s\ x]$ angehörig, so geht

$x\ y$ durch a'
$a\ y$ durch x',

d. h. die Puncte $a\ x\ y$ haben die Eigenschaft, dass der Tangentialpunct von a auf $x\ y$, und der von x auf $y\ a$ liegt, mithin [561] liegt auch der Tangentialpunct von y auf $a\ x$, und $a\ x\ y$ bilden ein Inflexionstripel [565]. Also befinden sich x

und y unter den Puncten der zu a gehörigen Inflexionsgruppe [573].

Zusatz. Wenn also durch die Curvenpuncte $q\ r\ s$ ein osculirender Kegelschnitt gelegt werden kann, so gehen durch diese Puncte neun solche Kegelschnitte und nicht mehr als neun, und ihre Osculationspuncte bilden eine Inflexionsgruppe.

580. Durch drei beliebig gegebene Puncte $q\ r\ s$ einer Curve 3. O. u lässt sich immer ein die Curve osculirender Kegelschnitt legen. Es giebt also stets neun solche Kegelschnitte, und deren Osculationspuncte bilden eine Inflexionsgruppe. (*Steiner.* Crelle 32. pag. 300.)

Beweis. Nimmt man $q\ r\ s$ als die Hauptpuncte einer Steiner'schen Verwandtschaft [200] an, so entspricht in dieser Verwandtschaft der Curve u eine andere Curve 3. O. u', welche auch durch die Puncte $q\ r\ s$ hindurchgeht [206] und keine Doppelpuncte hat, wenn die Curve u keine solchen besitzt [207]. Ist nun a' ein Wendepunct von u', und A' dessen Wendetangente, so hat die letztere in a' mit der Curve u' drei Puncte gemein. Der Geraden A' aber entspricht ein Kegelschnitt A, welcher durch die Puncte $q\ r\ s$ geht [202], und seinerseits in a mit der Curve u drei Puncte gemein haben muss, also diese Curve in a osculirt. Die neun Osculationspuncte a, welche eine Inflexionsgruppe bilden, entsprechen also den neun Wendepuncten der Curve u'. (*F. August.* Crelle 68. pag. 241.)

581. Ist L' eine Gerade, welche drei Wendepuncte $a'b'c'$ der Curve u' [580] verbindet, so entspricht ihr ein Kegelschnitt L, welcher durch $q\ r\ s$ und durch die drei den Wendepuncten $a'\ b'\ c'$ entsprechenden Osculationspuncte $a\ b\ c$ auf der Curve u geht. Da nun nach [568] der durch $q\ r\ s$ und zwei Osculationspuncte $a\ b$ bestimmte Kegelschnitt die Curve in demjenigen Puncte c trifft, welcher mit $a\ b$ ein Tripel bildet, so entspricht dreien in gerader Linie liegenden Wendepuncten der Curve u' ein Inflexionstripel auf u.

Verfolgt man nun entweder in [557] die verschiedenen in einer Inflexionsgruppe enthaltenen Tripel, oder die Geraden, auf denen die Wendepuncte der Curve u' vertheilt liegen, so ergiebt sich folgendes: Von den neun Osculationspuncten

a b . . . i liegen zwölf mal drei mit *q r s* in je einem Kegelschnitte *L*; nämlich die zwölf Tripel, die in der von den Puncten *a b . . . i* gebildeten Inflexionsgruppe enthalten sind. Diese zwölf Kegelschnitte *L* bilden auf vier verschiedene Arten Gruppen von drei Kegelschnitten, welche durch alle neun Puncte *a b . . .* hindurchgehen; durch jeden der Puncte *a b . . . i* gehen vier von ihnen, und vier von ihnen sind reell. (*Steiner.* Crelle 32. pag. 300.)

582. Aus einem Wendepuncte *a'* der Curve *u'* gehen drei Tangenten an diese Curve, und die drei Berührungspuncte $m'_1\, m'_2\, m'_3$ liegen in einer Geraden [341]. Nun entspricht jeder Tangente ein durch *q r s a* gehender Kegelschnitt, welcher die Curve *u* in einem Puncte *m* berührt; der durch die drei Puncte *m'* gehenden Geraden aber entspricht ein durch *q r s* und die drei entsprechenden Puncte *m* gehender Kegelschnitt. Also folgt: Durch drei Puncte *q r s* einer Curve 3. O. *u* und irgend einen der zugehörigen Osculationspuncte *a* lassen sich drei Kegelschnitte legen, welche die Curve *u* in den Puncten m_1, m_2, m_3 berühren, und diese letzteren drei Puncte liegen wieder mit *q r s* in einem Kegelschnitte. (*Steiner.* Crelle 32. pag. 300.)

583. Die 27 Berührungspuncte *m'* der aus den Wendepuncten der Curve *u'* an diese gezogenen Tangenten haben nach [351] die Eigenschaft, dass die Curve *u'* in jedem von ihnen von einem Kegelschnitte sechspunctig berührt wird. Einem Kegelschnitte aber entspricht nach [204] eine Curve 4. O., welche *q r s* zu Doppelpuncten hat. Demnach folgt: Die 27 Puncte *m*, in denen die Curve *u* von Kegelschnitten berührt wird, die duch *q r s* und je einen der Puncte *a b . . . i* gehen, haben die Eigenschaft, dass in jedem von ihnen die Curve *u* sechspunctig berührt wird von einer Curve 4. O., die *q r s* zu Doppelpuncten hat. (*Steiner.* Crelle 32. pag. 301.)

584. Wenn die Puncte *q r s* gegeben sind, so ist dadurch auch die Inflexionsgruppe der Osculationspuncte *a b . . . i* bestimmt [580]. Ist aber die letztere durch einen ihrer Puncte, *a*, gegeben, so giebt es unendlich viele Puncte, welche die Stelle der *q r s* vertreten können. Zieht man nämlich durch zwei dieser Puncte z. B. *q r* eine Gerade, schneidet damit die Curve in σ, und zieht durch σ eine beliebige Gerade, die in

$q' r'$ schneidet, so sind $q' r' s$ wieder drei Puncte, durch die ein in a osculirender Kegelschnitt gelegt werden kann. (*Steiner.* Crelle 32. pag. 301.)

Beweis. Ist $a\ b\ c$ ein in der Inflexionsgruppe enthaltenes Tripel, so liegen $a\ b\ c\ q\ r\ s$ in einem Kegelschnitte [568], daher liegt σ den Puncten $a\ b\ c\ s$ gegenüber, und $q' r'$ befinden sich mit $a\ b\ c\ s$ in einem Kegelschnitte. Dann aber haben $q' r' s$ dieselbe Eigenschaft wie $q\ r\ s$ [569].

585. Man kann daher durch Wiederholung dieses Verfahrens nicht allein so viele Puncte $q\ r\ s$ finden, als man will, sondern es können zwei Puncte $q r$ beliebig angenommen, und dann der zugehörige s bestimmt werden. Letzteres geschieht noch leichter mit Anwendung des Satzes [232]. Ist nämlich a und $q\ r$ gegeben, so schneide man die Curve mit $a\ q$ und $a\ r$ in x, y; ist dann z der Punct, in welchem $x y$ die Curve trifft, so schneidet $a z$ die Curve in dem gesuchten Puncte s. (*Steiner.* Crelle 32. pag. 301.)

586. Man kann sich die Frage vorlegen, ob es unter dem einer Inflexionsgruppe $a\ b \ldots i$ zugehörigen Systeme von Puncten $q\ r\ s$ auch Tripel geben kann? — Ist $a\ b\ c$ ein in der Inflexionsgruppe enthaltenes Tripel, so liegen $q\ r\ s$ mit $a\ b\ c$ in einem Kegelschnitte [568]. Wenn daher $x\ y\ z$ ein unter den Puncten $q\ r\ s$ vorkommendes Tripel ist, so müssen diese Puncte der zu $a\ b \ldots i$ connexen Inflexionsgruppe angehören [577]. Umgekehrt, bilden $x\ y\ z$ ein der connexen Gruppe angehöriges Tripel, so liegen sie mit $a\ b\ c$ in einem Kegelschnitt [576], und gehören daher mit zu den Puncten $q r s$ [569]. Demnach sind die zwölf in der connexen Inflexionsgruppe enthaltenen Tripel die einzigen, die in dem Systeme der $q\ r\ s$ vorkommen.

Dreizehnter Abschnitt.

Curvenbüschel dritter Ordnung.

§. 1.

587. Ein System von Curven 3. O., welche sich alle in den nämlichen neun Puncten durchschneiden, heisst ein Curvenbüschel 3. O., und die neun gemeinschaftlichen Puncte heissen die Basispuncte des Büschels. Sind $u = 0$ und $v = 0$ die Gleichungen von zweien dieser Curven, so lassen sich alle übrigen durch die Gleichung $u + \lambda v = 0$ darstellen, wenn man der Grösse λ alle möglichen Werthe beilegt. Durch einen beliebigen Punct, der nicht einer der neun Basispuncte ist, geht nur eine einzige Curve des Büschels [145]; und eine beliebige durch einen Basispunct gezogene Gerade wird in diesem Basispuncte nur von einer einzigen Curve des Büschels berührt, denn diese ist dann durch einen auf der gegebenen Geraden und unendlich nahe bei dem gegebenen Basispuncte liegenden Punct vollständig bestimmt.

588. Alle Curven 3. O., welche durch acht gegebene Puncte hindurch gehen, bilden einen Büschel, denn sie haben auch noch einen neunten Punct gemeinschaftlich [219].

589. Alle Curven 3. O., welche durch sieben gegebene Puncte hindurch gehen, bilden ein Curvennetz 3. O.

Beweis Sind $u = 0$, $u' = 0$, $u'' = 0$ drei dieser Curven, die keinen weiteren Punct gemein haben, so stellt die Gleichung

$$(1) \qquad u + \lambda u' + \mu u'' = 0$$

für jeden Werth von λ und μ eine Curve 3. O. dar, welche ebenfalls durch die gegebenen sieben Puncte geht. Nun ist jede der in Rede stehenden Curven durch zwei weitere passend anzunehmende Puncte bestimmt. Substituirt man die Werthe, welche u, u', u'' in diesen beiden Puncten erhalten, in die vorige Gleichung, so ergeben sich zwei Gleichungen, durch welche λ und μ so bestimmt werden, dass die Gleichung (1) gerade die betrachtete Curve darstellt. Da demnach jede durch die sieben Puncte gehende Curve 3. O. durch eine

Gleichung von der Form (1) dargestellt werden kann, so bilden alle diese Curven ein Netz [195].

590. Bei einem Netze von Curven 3. O., welche sieben Puncte gemeinschaftlich haben, liegen die auf ihnen vorkommenden Doppelpuncte auf einer Curve sechster Ordnung, und jeder Punct dieser Curve ist ein Doppelpunct für irgend eine Curve des Netzes.

Beweis. Stellt man das Curvennetz nach [589] durch die Gleichung

$$u + \lambda u' + \mu u'' = 0$$

dar, so müssen die Coordinaten x_i der Doppelpuncte nach [150] den Gleichungen

$$(2) \qquad \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x_1} + \lambda \frac{\partial u'}{\partial x_1} + \mu \frac{\partial u''}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x_2} + \lambda \frac{\partial u'}{\partial x_2} + \mu \frac{\partial u''}{\partial x_2} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x_3} + \lambda \frac{\partial u'}{\partial x_3} + \mu \frac{\partial u''}{\partial x_3} = 0 \end{aligned}$$

genügen. Eliminirt man daraus λ und μ, so erhält man als geometrischen Ort für die Doppelpuncte die Gleichung

$$(3) \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x_1}, & \frac{\partial u'}{\partial x_1}, & \frac{\partial u''}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u}{\partial x_2}, & \frac{\partial u'}{\partial x_2}, & \frac{\partial u''}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u}{\partial x_3}, & \frac{\partial u'}{\partial x_3}, & \frac{\partial u''}{\partial x_3} \end{vmatrix} = 0,$$

welche eine Curve sechster Ordnung darstellt, da die Elemente dieser Determinante vom zweiten Grade sind. Umgekehrt: genügen die Coordinaten eines Punctes x dieser Gleichung, so giebt es auch immer ein Werthepaar λ, μ, für welches die Gleichungen (2) bestehen, d. h. es giebt eine Curve des Netzes, auf welcher x ein Doppelpunct ist. (*Salmon* pag. 158.)

591. Die sieben gegebenen Puncte befinden sich selbst unter den Doppelpuncten, welche auf den durch sie hindurchgehenden Curven vorkommen, sodass die Curve sechster Ordnung, welche die Doppelpuncte enthält, auch durch die gegebenen sieben Puncte geht.

Beweis. Ist a einer der sieben Puncte, so kann man

eine der Curven des Netzes dadurch bestimmen, dass man verlangt, dass a für sie ein Doppelpunct sei, und dass sie ausserdem durch die übrigen sechs Puncte geht, denn da alsdann der Doppelpunct a für drei gegebene Puncte zählt [161], so sind von der zu bestimmenden Curve neun Puncte gegeben. (*Salmon* pag. 158.)

592. Die Curve sechster Ordnung, welche die Doppelpuncte der durch sieben Puncte hindurchgehenden Curven 3. O. enthält, geht nicht bloss durch die sieben Puncte hindurch, sondern hat diese Puncte ebenfalls zu Doppelpuncten und ausserdem in ihnen die Tangenten mit denjenigen Curven 3. O. gemeinschaftlich, welche in diesen Puncten ihre Doppelpuncte besitzen.

Beweis. Nimmt man einen der sieben Puncte, welcher a heissen möge, zur Ecke $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ des Fundamentaldreiecks, so kann man nach [160] die Gleichungen $u = 0$, $u' = 0$, $u'' = 0$ aus [590] in der Form schreiben:

$$\begin{aligned} u &= v_1 \, x_3^2 + v_2 \, x_3 + v_3 = 0 \\ u' &= v'_1 \, x_3^2 + v'_2 \, x_3 + v'_3 = 0 \qquad (1) \\ u'' &= v''_1 \, x_3^2 + v''_2 \, x_3 + v''_3 = 0, \end{aligned}$$

und darin sei

$$v_1 = a_1 x_1 + a_2 x_2, \quad v'_1 = a'_1 x_1 + a'_2 x_2, \quad v''_1 = a''_1 x_1 + a''_2 x_2.$$

Die Gleichung (3) der Curve 6. O. in [590] wird dann mit Umstellung der Zeilen und Columnen der Determinante

$$\begin{vmatrix} a_1 \, x_3^2 + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} x_3 + \ldots, & a_2 \, x_3^2 + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} x_3 + \ldots, & 2 v_1 \, x_3 + v_2 \\ a'_1 \, x_3^2 + \frac{\partial v'_2}{\partial x_1} x_3 + \ldots, & a'_2 \, x_3^2 + \frac{\partial v'_2}{\partial x_2} x_3 + \ldots, & 2 v'_1 \, x_3 + v'_2 \\ a''_1 \, x_3^2 + \frac{\partial v''_2}{\partial x_2} x_3 + \ldots, & a''_2 \, x_3^2 + \frac{\partial v''_2}{\partial x_2} x_3 + \ldots, & 2 v''_1 \, x_3 + v''_2 \end{vmatrix} = 0$$

und hat demnach die Form

$$V_1 \, x_3^5 + V_2 \, x_3^4 + \ldots = 0.$$

Dies bestätigt zunächst, dass diese Curve durch den Punct a hindurchgeht [160]. Bildet man aber V_1 und V_2, so erhält man

$$V_1 = \begin{vmatrix} a_1, & a_2, & 2(a_1 \, x_1 + a_2 \, x_2) \\ a'_1, & a'_2, & 2(a'_1 \, x_1 + a'_2 \, x_2) \\ a''_1, & a''_2, & 2(a''_1 x_1 + a''_2 x_2) \end{vmatrix},$$

und diese Determinante ist Null, da sie sich in die Summe zweier Determinanten auflösen lässt, von denen jede zwei gleiche Columnen enthält. Mithin hat die Curve 6. O. in a einen Doppelpunct [160]. Man erhält ferner

$$V_2 = 2a_1\left(\frac{\partial v'_2}{\partial x_2}v''_1 - \frac{\partial v''_2}{\partial x_2}v'_1\right) + 2\frac{\partial v_2}{\partial x_1}(a'_2 v''_1 - a''_2 v'_1)$$
$$+ 2a'_1\left(\frac{\partial v''_2}{\partial x_2}v_1 - \frac{\partial v_2}{\partial x_2}v''_1\right) + 2\frac{\partial v'_2}{\partial x_1}(a''_2 v_1 - a_2 v''_1)$$
$$+ 2a''_1\left(\frac{\partial v_2}{\partial x_2}v'_1 - \frac{\partial v'_2}{\partial x_2}v_1\right) + 2\frac{\partial v''_2}{\partial x_1}(a_2 v'_1 - a'_2 v_1)$$
$$+ a_1(a'_2 v''_2 - a''_2 v'_2) + a'_1(a''_2 v_2 - a_2 v''_2) + a''_1(a_2 v'_2 - a'_2 v_2)$$

oder

$$V_2 = 2\frac{\partial v_2}{\partial x_1}(a'_2 v''_1 - a''_2 v'_1) + 2\frac{\partial v_2}{\partial x_2}(a''_1 v'_1 - a'_1 v''_1)$$
$$+ 2\frac{\partial v'_2}{\partial x_1}(a''_2 v_1 - a_2 v''_1) + 2\frac{\partial v'_2}{\partial x_2}(a_1 v''_1 - a''_1 v_1)$$
$$+ 2\frac{\partial v''_2}{\partial x_1}(a_2 v'_1 - a'_2 v_1) + 2\frac{\partial v''_2}{\partial x_2}(a'_1 v_1 - a_1 v'_1)$$
$$+ (a'_1 a''_2 - a''_1 a'_2)v_2 + (a''_1 a_2 - a_1 a''_2)v'_2 + (a_1 a'_2 - a'_1 a_2)v''_2$$

Es ist aber

$$a'_2 v''_1 - a''_2 v'_1 = a'_2(a''_1 x_1 + a''_2 x_2) - a''_2(a'_1 x_1 + a'_2 x_2)$$
$$= (a''_1 a'_2 - a'_1 a''_2)x_1$$
$$a''_1 v'_1 - a'_1 v''_1 = a''_1(a'_1 x_1 + a'_2 x_2) - a'_1(a''_1 x_1 + a''_2 x_2)$$
$$= (a''_1 a'_2 - a'_1 a''_2)x_2,$$

und ähnlich bei den übrigen. Setzt man also

(2) $a''_1 a'_2 - a'_1 a''_2 = A,\; a_1 a''_2 - a''_1 a_2 = A',\; a'_1 a_2 - a_1 a'_2 = A'',$

so erhält man

$$V_2 = 2A\left(x_1\frac{\partial v_2}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial v_2}{\partial x_2}\right) + 2A'\left(x_1\frac{\partial v'_2}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial v'_2}{\partial x_2}\right)$$
$$+ 2A''\left(x_1\frac{\partial v''_2}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial v''_2}{\partial x_2}\right) - (Av_2 + A'v'_2 + A''_2 v''_2)$$

und folglich, da die Grössen v_2 homogene Functionen 2ten Grades von x_1 und x_2 sind,

$$V_2 = 3(Av_2 + A'v'_2 + A''v''_2.)$$

Nun kann man aber auch der Gleichung $u + \lambda u' + \mu u'' = 0$ irgend einer Curve 3. O. des Netzes die Form (1) geben, da diese Curve auch durch die Ecke a des Fundamentaldreiecks geht, nämlich:

$$(v_1 + \lambda v'_1 + \mu v''_1)x_3^2 + (v_2 + \lambda v'_2 + \mu v''_2)x_3 + v_3 + \lambda v'_3 + \mu v''_3 = 0.$$

Wählt man unter diesen Curven diejenige aus, für welche λ, μ solche Werthe haben, dass

$$(3) \qquad 1 : \lambda : \mu = A : A' : A''$$

ist, so erhält man für den Coefficienten von x_3^2

$$A v_1 + A' v'_1 + A'' v''_1 = (a_1 A + a'_1 A' + a''_1 A'') x_1 + (a_2 A + a'_2 A' + a''_2 A'') x_2,$$

und dieser Ausdruck ist Null, da beide Glieder desselben wegen der Gleichungen (2) verschwinden. Der Coefficient von x_3 dagegen verwandelt sich in $\frac{1}{3} V_2$. Demnach [162] hat diejenige Curve des Netzes, welche durch (3) bestimmt ist, in a einen Doppelpunct und das Tangentenpaar in diesem mit der Curve 6. O. gemeinschaftlich. Was hierdurch von einem der sieben Puncte bewiesen ist, kann ebenso von jedem der sechs übrigen gezeigt werden. (*Salmon.* pag. 159.)

593. Auf den Curven eines Büschels 3. O. giebt es im Allgemeinen zwölf Doppelpuncte.

Beweis 1. Stellt man irgend eine der Curven des Büschels durch die Gleichung

$$u + \lambda v = 0$$

dar, so besteht die Bedingung, dass diese einen Doppelpunct besitzt, in den Gleichungen [150]

$$(1) \qquad \frac{\partial u}{\partial x_1} + \lambda \frac{\partial v}{\partial x_1} = 0$$

$$(2) \qquad \frac{\partial u}{\partial x_2} + \lambda \frac{\partial v}{\partial x_2} = 0$$

$$(3) \qquad \frac{\partial u}{\partial x_3} + \lambda \frac{\partial v}{\partial x_3} = 0.$$

Die Doppelpuncte, welche auf den Curven des Büschels vorkommen, sind daher diejenigen Puncte, deren Coordinaten diese Gleichungen gleichzeitig befriedigen, während λ zwar veränderlich ist, aber stets in allen drei Gleichungen denselben Werth hat. Diese Gleichungen stellen drei Kegelschnittbüschel dar, nämlich die Büschel der conischen Polaren der Ecken des Fundamentaldreiecks, in Beziehung auf die Curven $u + \lambda v = 0$ des Büschels 3. O. Nennt man diejenigen Kegelschnitte dieser drei Büschel, welche gleichen Werthen von λ angehören, entsprechende, so kann man auch sagen, die Doppelpuncte sind die Puncte, welche je dreien

entsprechenden Kegelschnitten der drei Büschel gemeinsam sind. Nun erhält man den geometrischen Ort der Durchschnitte der entsprechenden Kegelschnitte der Büschel (1) und (2), wenn man aus diesen Gleichungen λ eliminirt, dieser Ort ist also die Curve 4. O.

$$(4) \qquad \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial v}{\partial x_2} - \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial v}{\partial x_1} = 0,$$

welche durch die Basispuncte der Büschel (1) und (2), nämlich durch die Durchschnitte der Kegelschnittpaare

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = 0, \ \frac{\partial v}{\partial x_1} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial x_2} = 0, \ \frac{\partial v}{\partial x_2} = 0$$

geht. Ebenso ist der geometrische Ort der Durchschnitte entsprechender Kegelschnitte der Büschel (1) und (3) eine zweite Curve 4. O.

$$(5) \qquad \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial v}{\partial x_3} - \frac{\partial u}{\partial x_3}\frac{\partial v}{\partial x_1} = 0,$$

welche durch die Basispuncte der Büschel (1) und (3) geht. Diese beiden Curven 4. O. (4) und (5) haben also die Basispuncte des Büschels (1) gemeinsam. Da nun durch jeden Punct der Curve (4) zwei entsprechende Kegelschnitte der Büschel (1) und (2), und durch jeden Punct der Curve (5) zwei entsprechende Kegelschnitte der Büschel (1) und (3) gehen, so gehen durch einen Durchschnittspunct der Curven (4) und (5) drei entsprechende Kegelschnitte aller drei Büschel (1) (2) (3) hindurch. Davon machen aber die Basispuncte des Büschels (1) eine Ausnahme, denn ist a einer dieser Basispuncte, so entspricht den durch a gehenden Kegelschnitten der Büschel (2) und (3) nicht derselbe Kegelschnitt des Büschels (1), vielmehr berührt der dem ersteren entsprechende in a die Curve (4), der dem zweiten entsprechende dagegen die Curve (5) (Vgl. die analoge Betrachtung in [93]). Die Puncte, in denen drei entsprechende Kegelschnitte der drei Büschel sich treffen, d. h. die gesuchten Doppelpuncte, sind demnach die Durchschnitte der Curven (4) und (5) mit Ausnahme der unter diesen befindlichen Basispuncte des Büschels (1). Zieht man übrigens auch noch die dritte Curve 4. O.

$$(6) \qquad \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial v}{\partial x_3} - \frac{\partial u}{\partial x_3}\frac{\partial v}{\partial x_2} = 0$$

hinzu, welche den geometrischen Ort der Durchschnitte ent-

sprechender Kegelschnitte der Büschel (2) und (3) bildet, so müssen die gesuchten Doppelpuncte offenbar auch auf dieser Curve liegen. Diese aber geht im Allgemeinen nicht durch die Basispuncte des Büschels (1). Da nun die Curven (4) und (5) sechszehn Durchschnittspuncte besitzen, von denen die vier Basispuncte des Büschels (1) abzurechnen sind, so bleiben 12 für die Doppelpuncte übrig. (*Salmon* pag. 158. *Cremona* art. 88.)

Beweis 2. Bezeichnet man die Basispuncte des Büschels mit 123456789 und betrachtet alle Curven 3. O., welche durch die Puncte 1234567 gehen, so erfüllen die auf diesen vorkommenden Doppelpuncte eine Curve 6. O. C_6 [590]. Ebenso erfüllen die Doppelpuncte, welche auf den Curven 3. O. vorkommen, die durch 1234568 gehen, eine zweite Curve 6. O. C'_6. Demnach sind die Doppelpuncte derjenigen Curven 3. O., welche beiden Netzen gemeinschaftlich sind, also durch 12345678 und daher auch durch 9 gehen und demnach dem Büschel angehören, Durchschnitte der beiden Curven C_6 und C'_6. Die Anzahl dieser Durchschnitte beträgt 36. Nun geht aber C_6 durch 1234567 und hat diese Puncte zu Doppelpuncten [592], ebenso geht C'_6 durch 1234568 und hat diese Puncte zu Doppelpuncten. Die beiden Curven C_6 und C'_6 haben also die Puncte 123456 gemeinschaftlich zu Doppelpuncten, sodass in jedem dieser Puncte vier ihrer Durchschnitte vereinigt liegen. Es kann aber keiner dieser Puncte ein Doppelpunct für eine Curve des Büschels sein, denn wäre etwa 1 ein Doppelpunct für eine dieser Curven, so würde diese mit einer anderen Curve des Büschels in 1 zwei und ausserdem noch acht andere, im Ganzen also zehn Puncte gemein haben, was nicht möglich ist. Mithin müssen von den 36 Durchschnitten von C_6 und C'_6 die 24 in Abzug gebracht werden, welche sich in den Puncten 123456 befinden, und nur 12 sind Doppelpuncte für die Curven des Büschels. (*Salmon* pag. 159.)

594. Die zwölf Doppelpuncte, welche in einem Curvenbüschel 3. O. vorkommen, haben die Eigenschaft, dass ihre geraden Polaren in Bezug auf alle Curven des Büschels die nämlichen geraden Linien sind; und zwar sind diese zwölf Puncte die einzigen, welche diese Eigenschaft haben.

Beweis. Wird der Büschel durch die Gleichung $u + \lambda v = 0$ dargestellt, so haben die geraden Polaren eines Punctes x in veränderlichen y_i die Gleichung $\varDelta_y(u_x) + \lambda\, \varDelta_y(v_x) = 0$ [267]. Offenbar fallen alle diese den verschiedenen Werthen von λ angehörigen Geraden dann und nur dann in eine zusammen, wenn die Gleichungen

$$\varDelta_y(u_x) = y_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + y_3 \frac{\partial u}{\partial x_3} = 0$$

$$\varDelta_y(v_x) = y_1 \frac{\partial v}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial v}{\partial x_2} + y_3 \frac{\partial v}{\partial x_3} = 0$$

die nämliche Gerade darstellen. Dazu ist erforderlich und hinreichend, dass

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} : \frac{\partial u}{\partial x_2} : \frac{\partial u}{\partial x_3} = \frac{\partial v}{\partial x_1} : \frac{\partial v}{\partial x_2} : \frac{\partial v}{\partial x_3}$$

sei. Diese Gleichungen liefern also die Coordinaten derjenigen Puncte, welche die in Rede stehende Eigenschaft besitzen. Wie man sieht, kommen sie vollständig überein mit den Gleichungen (4), (5) oder auch (1), (2), (3), in [593], welche die Coordinaten der Doppelpuncte lieferten. (*Salmon* pag 157.)

§. 2.

595. Eine besondere Beachtung verdient ein Büschel von Curven 3. O., bei welchem alle Curven folgendes mit einander gemein haben: erstlich drei in gerader Linie liegende Puncte $a, b, c,$ sodann die Tangenten A, B, C in diesen und endlich die Tangentialpuncte α, β, γ von $a, b, c,$ welche dann [230] ebenfalls in gerader Linie liegen. Bezeichnet man die Geraden $a\,b\,c$ und $\alpha\,\beta\,\gamma$ resp. mit D und $F,$ so kann man den Curvenbüschel nach [245] durch die Gleichung

(1) $$A\,B\,C - \lambda^2 D^2 F = 0$$

darstellen, worin λ^2 den veränderlichen Parameter bedeutet. Bei einem solchen Curvenbüschel kann man die Anzahl 12 der existirenden Doppelpuncte nicht aufrecht halten; denn eine dieser Curven, nämlich $D^2 F = 0$ besteht aus drei Geraden, von welchen zwei in D zusammenfallen. Jeder Punct der letzteren Geraden ist daher als Doppelpunct zu betrachten. Es bleibt aber auch für diese Puncte die Eigenschaft [594] bestehen. Nimmt man nämlich die Geraden A, B, C zu den

Seiten $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ des Fundamentaldreiecks und setzt

$$D \equiv d_1 x_1 + d_2 x_2 + d_3 x_3 \qquad F \equiv f_1 x_1 + f_2 x_2 + f_3 x_3,$$

sodass die Gleichung (1) übergeht in

$$u = x_1 x_2 x_3 - \lambda^2 D^2 F = 0,$$

so erhält man

$$(2) \qquad \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x_1} &= x_2 x_3 - \lambda^2 D (f_1 D + 2 d_1 F) \\ \frac{\partial u}{\partial x_2} &= x_3 x_1 - \lambda^2 D (f_2 D + 2 d_2 F) \\ \frac{\partial u}{\partial x_3} &= x_1 x_2 - \lambda^2 D (f_3 D + 2 d_3 F) \end{aligned}$$

und damit wird die gerade Polare eines Punctes x, der auf D liegt, für den also $D = 0$ ist, in veränderlichen y_i

$$x_2 x_3 y_1 + x_3 x_1 y_2 + x_1 x_2 y_3 = 0.$$

Diese ist also für alle Curven des Büschels dieselbe und zwar nach [290] die gerade Polare des Punctes x in Bezug auf das Dreieck ABC, welches ebenfalls eine Curve unseres Büschels ist. Zieht man nun die Puncte der Geraden D nicht in Betracht, so treten zuerst als Doppelpuncte die drei Durchschnitte der Geraden A, B, C auf. Ausserdem aber existiren, wie sich sogleich ergeben wird, noch drei Doppelpuncte auf den Curven des Büschels.

596. Um diese Doppelpuncte zu finden, wenden wir das in [593. Bew. 1] angegebene Verfahren an und haben dann diejenigen Puncte zu suchen, für welche die Ausdrücke (2) in [595] gleichzeitig verschwinden, und daher die Grösse λ^2 aus je zweien dieser Gleichungen zu eliminiren. Das giebt die drei Gleichungen

$$\begin{aligned} D x_1 [x_2 (f_2 D + 2 d_2 F) - x_3 (f_3 D + 2 d_3 F)] &= 0 \\ D x_2 [x_3 (f_3 D + 2 d_3 F) - x_1 (f_1 D + 2 d_1 F)] &= 0 \\ D x_3 [x_1 (f_1 D + 2 d_1 F) - x_2 (f_2 D + 2 d_2 F)] &= 0, \end{aligned}$$

welche die drei Curven 4. O. (4), (5), (6) in [593] darstellen, deren gemeinschaftliche Puncte die Doppelpuncte sind. Aber von diesen Curven besteht jede aus zwei Geraden und einem Kegelschnitt, and zwar haben sie alle drei die Gerade D gemeinschaftlich, wodurch sich bestätigt, dass alle Puncte der-

selben als Doppelpuncte betrachtet werden können. Sodann befinden sich unter ihren gemeinschaftlichen Puncten die Ecken

$$\begin{pmatrix} x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_3 = 0 \\ x_1 = 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{pmatrix}$$

des Fundamentaldreiecks, also die Durchschnitte der drei Tangenten A, B, C. Lässt man nun die Factoren Dx_1, Dx_2, Dx_3 fort, so kann man die übrig bleibenden Kegelschnitte schreiben

$$D\,(f_2 x_2 - f_3 x_3) + 2\,F\,(d_2 x_2 - d_3 x_3) = 0$$
$$D\,(f_3 x_3 - f_1 x_1) + 2\,F\,(d_3 x_3 - d_1 x_1) = 0$$
$$D\,(f_1 x_1 - f_2 x_2) + 2\,F\,(d_1 x_1 - d_2 x_2) = 0,$$

und diese schneiden sich in denselben vier Puncten, denn die Summe dieser Gleichungen ist identisch Null, und daher liegen die Puncte, in denen sich die beiden ersten Kegelschnitte schneiden, auch auf dem dritten. Unter diesen vier Puncten aber befindet sich auch der Durchschnitt (D, F) und dieser liegt auf der Geraden D. Ausserdem trifft diese Gerade die drei Kegelschnitte in drei verschiedenen Puncten. Daher haben die letzteren noch drei Puncte gemeinschaftlich, die nicht auf D liegen. Demnach ergiebt sich, dass der in [595] angegebene Curvenbüschel ausser den Puncten der Geraden D und den Durchschnitten der drei Tangenten A, B, C drei Doppelpuncte besitzt.

597. Legt man aus einem der drei Puncte α, β, γ [595], z. B. aus γ, alle Tangenten an alle Curven des Büschels, so ist eine dieser Tangenten, nämlich C, allen Curven gemeinschaftlich; die Berührungspuncte der übrigen aber liegen auf einem Kegelschnitt, welcher durch den Durchschnitt der Tangenten A und B, und ausserdem durch die Puncte a, b und γ geht. Auf demselben Kegelschnitte liegen auch die Doppelpuncte des Büschels.

Beweis. Greift man irgend eine Curve des Büschels heraus, so ist jede der drei Tangenten, welche ausser C aus γ an diese Curve gezogen werden können, nach [246] zugleich Tangente an einem Kegelschnitt, welche A und B in resp. a und b berührt, und zwar ist der Berührungspunct der Curve

zugleich der des Kegelschnittes. Hat die Curve einen Doppelpunct d, so hat die Gerade, welche γ mit diesem verbindet, nach [246] dieselbe Eigenschaft, denn die Gerade γd schneidet dann die Curve in d in zwei zusammenfallenden Puncten. Demnach sind die Berührungspuncte der aus γ an die Curven des Büschels gehenden Tangenten (mit Ausnahme von C) und die Doppelpuncte zugleich die Berührungspuncte der Tangenten aus γ an die Kegelschnitte eines Büschels, welche A und B in den Puncten a und b berühren. Demnach [132] liegen diese Berührungspuncte und die Doppelpuncte auf einem Kegelschnitte, der die oben erwähnte Eigenschaft hat. (*Salmon* pag. 160.)

598. Hieraus folgt, dass die drei Doppelpuncte des in Rede stehenden Büschels 3. O. auf drei Kegelschnitten liegen, welche durch folgende Puncte gehen:

der erste durch (A, B), a, b, γ
„ zweite „ (B, C), b, c, α
„ dritte „ (C, A), c, a, β.

Nimmt man die Geraden A, B, C zu Seiten des Fundamentaldreieckes und bezeichnet mit A_α, etc. die Coordinaten der Puncte α, etc., sowie mit D_α etc. das Resultat der Substitution dieser Coordinaten in die lineare Function D, so sind nach [132] die Gleichungen dieser drei Kegelschnitte folgende:

$$\frac{A_\gamma}{A} + \frac{B_\gamma}{B} - 2\,\frac{D_\gamma}{D} = 0$$

$$\frac{B_\alpha}{B} + \frac{C_\alpha}{C} - 2\,\frac{D_\alpha}{D} = 0$$

$$\frac{C_\beta}{C} + \frac{A_\beta}{A} - 2\,\frac{D_\beta}{D} = 0.$$

599. Die drei Doppelpuncte liegen ferner auf einem Kegelschnitte, welcher dem Dreieck $A\,B\,C$ umschrieben ist, nämlich auf der conischen Polare des Punctes (D, F) in Beziehung auf dieses Dreieck [296].

Beweis. Die gerade Polare eines Doppelpunctes ist in Bezug auf alle Curven des Büschels dieselbe Gerade [594]. Zwei Curven dieses Büschels sind $A\,B\,C = 0$ und $D^2\,F = 0$, in Beziehung auf die letztere aber geht die gerade Polare jedes Punctes durch (D, F) [290]. Daher gehen die geraden

Polaren der drei Doppelpuncte in Beziehung auf das Dreiseit $A\,B\,C$ durch (D, F), und folglich geht die conische Polare von (D, F) in Beziehung auf $A\,B\,C$ durch die drei Doppelpuncte [273]. (*Salmon* pag. 159.)

600. Die Poloconik der Geraden D ist in Bezug auf alle Curven des Büschels derselbe Kegelschnitt.

Beweis. Die gerade Polare irgend eines Punctes der Geraden D in Bezug auf das von den Tangenten A, B, C gebildete Dreieck ist nach [595] zugleich die gerade Polare desselben Punctes in Bezug auf jede Curve unseres Büschels. Die Poloconik der Geraden D, als die Einhüllende aller dieser geraden Polaren [311] bleibt daher auch für alle Curven des Büschels dieselbe.

601. Die Verbindungslinie zweier Doppelpuncte des Büschels ist die Polare des dritten Doppelpunctes in Beziehung auf die Poloconik der Geraden D. Oder: Sind o, o', o'' die drei Doppelpuncte, so ist das Dreieck $o\,o'\,o''$ der Poloconik von D conjugirt [108].

Beweis. Wir betrachten hier die Doppelpuncte als die Durchschnitte zweier der drei in [598] angegebenen Kegelschnitte, z. B. der beiden ersten, deren Gleichungen sind

$$(1)\qquad \begin{aligned} \frac{A_\gamma}{A} + \frac{B_\gamma}{B} - 2\,\frac{D_\gamma}{D} = 0 \\ \frac{B_\alpha}{B} + \frac{C_\alpha}{C} - 2\,\frac{D_\alpha}{D} = 0. \end{aligned}$$

Diese haben, wie aus [598] zu ersehen ist, den Punct b, d. i. (B, D) gemeinschaftlich und ihre drei anderen Durchschnittspuncte sind die Doppelpuncte o, o', o''. Wir wählen nun die Gleichungen der Fundamentalseiten $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$ in einer solchen Form, dass in Beziehung auf sie die Coordinaten eines der drei Doppelpuncte, z. B. o, die Verhältnisse

$$A : B : C = 1 : 1 : 1$$

erhalten. Das ist immer möglich, denn wären etwa $a_1 : a_2 : a_3$ die Coordinaten von o, so dürfte man die Gleichungen der Fundamentallinien nur in der Form $\frac{A}{a_1} = 0$, $\frac{B}{a_2} = 0$, $\frac{C}{a_3} = 0$ annehmen, um in Beziehung auf diese neuen linearen Func-

tionen für die Coordinaten von o die obigen Werthe zu erhalten. So genommen sei dann

(2) $$D \equiv d_1 A + d_2 B + d_3 C.$$

Es kommt nun zunächst darauf an, die Coordinaten der Puncte γ und α zu bestimmen, um diese in die Gleichungen (1) einsetzen zu können. Zu diesem Ende bemerke man, dass die Gerade γo nach [597] in o einen Kegelschnitt berührt, welcher A und B zu Tangenten und D zur Berührungssehne hat, dessen Gleichung also in der Form

$$AB = k^2 D^2$$

geschrieben werden kann. Bestimmt man nach [131] einen Punct dieses Kegelschnitts durch einen Parameter μ, so ist für diesen Punct nach (2) in [131]

(3) $$\mu^2 = \frac{B}{A} \qquad \mu k = \frac{B}{D},$$

und die Tangente in diesem Puncte hat nach (3) die Gleichung

(4) $$\mu^2 A + B - 2 \mu k D = 0.$$

Nimmt man nun den Punct o als denjenigen an, dem die Zahl μ zugehört, so ist für diesen nach der obigen Annahme

$$A = 1, \; B = 1, \; C = 1 \text{ und daher } D = d_1 + d_2 + d_3$$

zu setzen. Für o wird also aus (3)

$$\mu^2 = 1 \qquad \mu k = \frac{1}{d_1 + d_2 + d_3}$$

und damit die Gleichung der Tangente in o aus (4) in Verbindung mit (2)

$$(d_1 + d_2 + d_3)(A + B) - 2(d_1 A + d_2 B + d_3 C) = 0.$$

Setzt man darin der Kürze wegen

$$d_1 + d_2 + d_3 = 2\delta,$$

so nimmt diese Gleichung die Form

$$(\delta - d_1) A + (\delta - d_2) B - d_3 C = 0$$

an. Dies ist nun die Gleichung der Geraden γo, und daher γ ihr Durchschnitt mit der Geraden $C = 0$. Setzt man aber $C = 0$, so folgt

$$A : B = (\delta - d_2) : -(\delta - d_1),$$

und daher sind die Coordinaten des Punctes γ

$$A_\gamma = \delta - d_2, \; B_\gamma = -(\delta - d_1), \; C_\gamma = 0,$$

und damit erhält man aus (2)

$$D_\gamma = d_1(\delta - d_2) - d_2(\delta - d_1) = \delta(d_1 - d_2).$$

Ganz ebenso ermittelt man auch die Werthe von B_α, C_α, D_α durch Betrachtung der Geraden αo, welche in o einen Kegelschnitt berührt, der B und C zu Tangenten, und D zur Berührungssehne hat. Statt der Gleichungen (3) und (4) treten daher die Folgenden auf

$$\mu^2 = \frac{C}{B} \qquad \mu k = \frac{C}{D}$$

$$\mu^2 B + C - 2\mu k D = 0,$$

welche durch Einsetzen der Coordinaten des Punctes o, nämlich $A = 1$, $B = 1$, $C = 1$

$$\mu^2 = 1 \qquad \mu k = \frac{1}{d_1 + d_2 + d_3}$$

und dann für die Gerade αo die Gleichung

$$-d_1 A + (\delta - d_2) B + (\delta - d_3) C = 0$$

liefern. Da dann α der Durchschnitt von αo mit $A = 0$ ist, so ergiebt sich

$$A_\alpha = 0, \quad B_\alpha = \delta - d_3, \quad C_\alpha = -(\delta - d_2)$$

und

$$D_\alpha = d_2(\delta - d_3) - d_3(\delta - d_2) = \delta(d_2 - d_3).$$

Mit diesen Werthen werden nun die Gleichungen (1) der beiden zu untersuchenden Kegelschnitte

$$(5) \qquad \begin{aligned} \frac{\delta - d_2}{A} - \frac{\delta - d_1}{B} - \frac{2\delta(d_1 - d_2)}{D} &= 0 \\ \frac{\delta - d_3}{B} - \frac{\delta - d_2}{C} - \frac{2\delta(d_2 - d_3)}{D} &= 0. \end{aligned}$$

Es kommt nun darauf an, durch Combination dieser Gleichungen eine neue Gleichung zu erhalten, welche zwei durch die vier Durchschnitte b, o, o', o'' der beiden Kegelschnitte gehende Gerade darstellt, und zwar bo und $o'o''$. Zu dem Ende werden die Gleichungen umgeformt. Schafft man bei der ersten die Nenner fort und kehrt die Zeichen um, so erhält man

$$[(\delta - d_1) A - (\delta - d_2) B] D + 2\delta(d_1 - d_2) A . B = 0,$$

und wenn man den identisch verschwindenden Ausdruck

$$[(\delta - d_1) A - (\delta - d_2) B](-2\delta . B) + [(\delta - d_1) A - (\delta - d_2) B] 2\delta B$$

hinzufügt

(6) $[(\delta-d_1)A-(\delta-d_2)B](D-2\delta B)+2\delta B(\delta-d_2)(A-B)=0.$

Verfährt man ebenso mit der zweiten Gleichung (5) und fügt den verschwindenden Ausdruck

$$[(\delta-d_3)C-(\delta-d_2)B](-2\delta B)+[(\delta-d_3)C-(\delta-d_2)B]2\delta B$$

hinzu, so ergiebt sich

(7) $[(\delta-d_3)C-(\delta-d_2)B](D-2\delta B)+2\delta B(\delta-d_2)(C-B)=0.$

Multiplicirt man nun die Gleichung (6) mit d_1, und (7) mit d_3, addirt und bemerkt, dass

$$d_1(A-B)+d_3(C-B)=D-2\delta B$$

ist, so wird $D-2\delta B$ Factor, und man erhält

$$(D-2\delta B)[d_1(\delta-d_1)A+d_2(\delta-d_2)B+d_3(\delta-d_3)C]=0.$$

Diese Gleichung stellt daher zwei durch die vier Puncte b, o, o', o'' gehende Gerade dar. Von diesen geht die erste nämlich $D-2\delta B=0$ durch $b=(B, D)$ und durch o, da ihr durch die Coordinaten dieses Punctes, nämlich $B=1$, $D=2\delta$, genügt wird, und folglich ist die andere

$$d_1(\delta-d_1)A+d_2(\delta-d_2)B+d_3(\delta-d_3)C=0$$

die Gleichung der Geraden $o'o''$.

Nun wird andrerseits nach [318] die Poloconik der Geraden D ausgedrückt durch die Gleichung

$$\Pi=\sqrt{d_1 A}+\sqrt{d_2 B}+\sqrt{d_3 C}=0$$

oder entwickelt [103]

$$\Pi=d_1^2A^2+d_2^2B^2+d_3^2C^2-2d_2d_3BC-2d_3d_1CA-2d_1d_2AB=0.$$

Daraus erhält man

$$\tfrac{1}{2}\frac{\partial\Pi}{\partial A}=d_1(d_1A-d_2B-d_3C),\quad \tfrac{1}{2}\frac{\partial\Pi}{\partial B}=d_2(-d_1A+d_2B-d_3C)$$

$$\tfrac{1}{2}\frac{\partial\Pi}{\partial C}=d_3(-d_1A-d_2B+d_3C),$$

und diese Ausdrücke nehmen im Puncte o, d. h. für $A=B=C=1$ die Werthe

$$-2d_1(\delta-d_1),\quad -2d_2(\delta-d_2),\quad -2d_3(\delta-d_3)$$

an. Daher erhält man für die Polare von o in Beziehung auf Π die Gleichung

$$d_1(\delta-d_1)A+d_2(\delta-d_2)B+d_3(\delta-d_3)C=0,$$

also wiederum die Gerade $o'o''$. (*Salmon* pag. 163.)

602. Zieht man eine Gerade T durch einen der Tangentialpuncte α, β, γ, z. B. γ, und einen der drei Doppelpuncte o, o', o'' z. B. durch o, und schneidet mit ihr die Gerade D in d und irgend eine Curve des Büschels in n und p, so sind die letzteren Puncte allemal einander harmonisch zugeordnet in Bezug auf o und d. Die Durchschnitte n, p der Geraden T mit den Curven des Büschels sind conjugirte Punctepaare einer Involution.

Beweis. Die Puncte n, p liegen nach [245] auf einem Kegelschnitte desjenigen Kegelschnittbüschels, welcher die Geraden A und B in a und b berührt, also D zur Berührungssehne hat. Die Gerade $o\gamma$ aber berührt nach [597] in o einen Kegelschnitt desselben Büschels. Da nun die Gerade D doppelt gezählt, ebenfalls einen Kegelschnitt dieses Büschels bildet, so sind o und d die Doppelpuncte der durch den Kegelschnittbüschel auf der Geraden γo erzeugten Involution, und daher sind n und p einander harmonisch zugeordnet in Bezug auf o und d.

Bemerkung. Dass in der That der Punct d als der zweite Doppelpunct der Involution, d. h. [118] als der zweite Berührungspunct der Geraden γo mit einem Kegelschnitte des Büschels zu betrachten ist, geht daraus hervor, dass die Berührungspuncte der aus γ an die Kegelschnitte des Büschels gelegten Tangenten nach [132] auf einem Kegelschnitte liegen, welcher durch γ geht. Denn gäbe es (ausser der doppelt gezählten Geraden D) noch einen zweiten Kegelschnitt, welcher die Gerade γo berührt, so müsste der Berührungspunct auch auf jenem durch γ gehenden Kegelschnitte liegen, und dieser daher die Gerade γo in drei Puncten, nämlich in o, in γ und in dem neuen Berührungspuncte treffen, was nicht möglich ist.

603. Lässt man die Gerade D, welche die Berührungspuncte a, b, c verbindet, ins Unendliche rücken, so gehen die Tangenten A, B, C in Asymptoten über, und die Tangentialpuncte α, β, γ verwandeln sich in die Asymptotendurchschnitte. Aus [596] folgt alsdann: Auf den Curven 3. O., welche die Asymptoten gemeinschaftlich haben und diese in denselben Puncten schneiden, giebt es drei Doppelpuncte o, o', o''.

604. Beachtet man ferner, dass die Poloconik der unendlich fernen Geraden nach [319] der Kegelschnitt ist, welcher die Seiten des von den Asymptoten gebildeten Dreiecks in deren Mitten berührt, so folgt aus [601]: Die Gerade, welche zwei Doppelpuncte eines Büschels von Curven 3. O., die die nämlichen Asymptoten haben und diese in den nämlichen Puncten schneiden, verbindet, ist die Polare des dritten Doppelpunctes in Beziehung auf den Kegelschnitt, welcher die Seiten des Asymptotendreieckes in deren Mitten berührt; die drei Doppelpuncte bilden daher ein dem genannten Kegelschnitte conjugirtes Dreieck [108]. (*Plücker.* System der anal. Geom. pag. 193.)

605. Ferner folgt aus [602], da nun auch d ins Unendliche rückt, und daher o in die Mitte von n und p fällt: Wenn man bei einem Büschel von Curven 3. O., welche die nämlichen Asymptoten haben und diese in den nämlichen Puncten schneiden, einen der Asymptotendurchschnitte mit einem der Doppelpuncte durch eine Gerade T verbindet, so liegt der Doppelpunct in der Mitte der beiden Puncte, in denen T irgend eine Curve des Büschels schneidet. Aus diesem Grunde hat *Plücker* die Doppelpuncte die Mittelpuncte der Curven des Büschels genannt. (*Plücker.* System der anal. Geom. pag. 180.)

606. Fallen zwei der drei Doppelpuncte $o\,o'\,o''$ zusammen, z. B. o' mit o, so ist dieser Punct ein Rückkehrpunct. — Denn da $o'o''$ die Polare von o in Beziehung auf den in [604] erwähnten Kegelschnitt ist, und diese nun durch o hindurch geht, so liegt o auf diesem Kegelschnitt selbst und ist daher nach [326] ein Rückkehrpunct. (*Salmon* pag. 164.)

§. 3.

607. Werden die Curven eines Büschels 3. O. von einer Transversale geschnitten, so bilden auf derselben die Punctgruppen, deren drei Puncte jedesmal der nämlichen Curve angehören, eine cubische Involution. — Denn bezieht man die Gleichung des Büschels $u + \lambda v = 0$ auf Parallelcoordinaten, x, y, deren Abscissenaxe mit der gegebenen Transversale zusammenfällt, so erhält man, wenn man $y = 0$ setzt, für

die Abscissen der Durchschnitte der Transversale mit den Curven eine Gleichung von der Form (1) in [50]. (*Cremona* art. 49.)

608. Unter den Curven eines Büschels 3. O. giebt es vier, welche eine beliebig gegebene Gerade G berühren. Geht die letztere zufällig durch einen Doppelpunct, so zählt dieser für einen Berührungspunct.

Beweis. Auf der cubischen Involution, welche durch den Büschel auf der Geraden G erzeugt wird [607], giebt es vier Doppelpuncte [50]; in einem solchen fallen zwei Puncte einer Gruppe zusammen, also auch zwei Durchschnitte einer Curve mit der Geraden G. Daher berührt diese die Curve oder trifft sie in einem Doppelpuncte. (*Cremona* art. 49.)

609. Geht die Gerade G durch einen Basispunct des Büschels, so hat eine die Gerade berührende Curve ihren Berührungspunct in dem Basispuncte [587], und ausserdem giebt es nur noch zwei Curven, welche diese Gerade berühren. — Aus [51], denn in diesem Falle fällt von jeder Gruppe der Involution ein Punct in den Basispunct.

610. Ist ein Basispunct für eine der Curven des Büschels ein Wendepunct, und die Gerade G in diesem die Wendetangente dieser Curve, so giebt es ausser der letzteren nur noch eine Curve des Büschels, welche diese Wendetangente berührt. — Denn es tritt alsdann der in [52] betrachtete Fall ein.

611. Wenn von den Basispuncten eines Curvenbüschels 3. O. zwei in einen a zusammenfallen, so giebt es unter den Curven des Büschels eine, welche in a einen Doppelpunct, und eine, welche in a einen Wendepunct hat. Alle mit Ausnahme der ersten haben in a eine gemeinschaftliche Tangente A.

Beweis. Zunächst ist klar, dass wenn eine Curve des Büschels in a einen Doppelpunct hat, diese die den anderen gemeinschaftliche Tangente A nicht berühren kann, denn dann hätte diese Curve mit einer anderen in a drei und ausserdem noch sieben Puncte gemeinschaftlich, was nicht möglich ist, da zwei Curven 3. O. nur neun Puncte mit einander gemein haben können. Aus demselben Grunde kann es auch nicht mehr als eine Curve mit einem Doppelpuncte in a geben.

Denkt man sich nun durch a eine von A verschiedene Gerade B gezogen, und bestimmt eine Curve des Büschels durch die Annahme eines auf B und unendlich nahe bei a liegenden Punctes, so wird diese Curve in a sowohl von A, als auch von B in zwei zusammenfallenden Puncten getroffen, und folglich ist a für diese Curve ein Doppelpunct. Nimmt man ferner auf der Geraden A selbst einen bei a unendlich nahen Punct an, so bestimmt dieser eine Curve, welche in a drei zusammenfallende Puncte mit A gemein hat, und welche daher in a einen Wendepunct besitzt, da A nicht Tangente in einem Doppelpuncte sein kann. (*Cremona* art. 47.)

§. 4.

612. In einem syzygetischen Curvenbüschel 3. O., d. h. [355] einem solchen, deren Curven sich in ihren gemeinschaftlichen Wendepuncten durchschneiden, giebt es vier Curven, welche aus drei Geraden bestehen. Diese heissen syzygetische Dreiseite.

Beweis. Nach [353] gehen durch die Wendepuncte einer Curve 3. O. und daher auch durch die Basispuncte eines syzygetischen Büschels zwölf Gerade, welche sich der Art in vier Gruppen zu je dreien theilen, dass die drei Geraden jeder Gruppe alle Wendepuncte enthalten. Diese vier Gruppen bilden daher vier syzygetische Dreiseite. Da diese vier Curven aber zwölf Doppelpuncte enthalten, nämlich jedes Dreiseit die drei Durchschnitte ihrer drei Geraden, so können in dem Büschel keine weiteren Doppelpuncte [593] und daher auch keine weiteren Dreiseite vorkommen. (*Cremona* art. 140. b.)

613. Hieraus folgt: In einem Büschel syzygetischer Curven 3. O. giebt es ausser den vier Dreiseiten keine Curve mit einem Doppelpunct. (*Cremona* art. 140. b.)

614. Jede Seite R eines syzygetischen Dreiseits, also jede Gerade, welche drei Wendepuncte enthält, ist die gemeinschaftliche gerade Polare der gegenüberliegenden Ecke r, in welcher nach [365] die harmonischen Polaren der betreffenden drei Wendepuncte sich schneiden, in Bezug auf alle Curven des syzygetischen Büschels.

Beweis, Die conische Polare eines Wendepuncts besteht

aus der Wendetangente und der harmonischen Polare. Letztere geht durch r und ist gemeinschaftlich für alle Curven des Büschels [356]. Da demnach die conischen Polaren der drei in Rede stehenden Wendepuncte in Bezug auf alle Curven des Büschels durch r gehen, so gehen nach [273] die geraden Polaren von r in Bezug auf alle Curven des Büschels durch die drei Wendepuncte und fallen daher mit der Geraden R zusammen. (*Cremona* art. 142.)

615. Nach [366] hat man jetzt: Die zwölf Ecken der vier syzygetischen Dreiseite sind die Puncte, in welchen sich die neun harmonischen Polaren der Wendepuncte zu je drei treffen. Auf jeder harmonischen Polare liegen vier dieser Ecken. (*Hesse.* Eigenschaften der Wendepuncte etc. Crelle'sc Journ. Bd. 38. pag. 259. 261. *Cremona* art. 142.)

616. Sind $w_1\, w_2\, w_3$ die auf einer Seite R eines syzygetischen Dreiseits liegenden Wendepuncte, $W_1\, W_2\, W_3$ deren harmonische Polaren, die sich [365] in der der Seite R gegenüberliegenden Ecke r treffen, und zieht man aus r die sechs Tangenten an irgend eine Curve des Büschels, so liegen die sechs Berührungspuncte auf drei Mal drei Geraden, von denen je drei durch einen der Wendepuncte $w_1\, w_2\, w_3$ gehen. — (Aus [369], da r auf jeder der drei harmonischen Polaren W_1, W_2, W_3 liegt.) Und die sechs Tangenten sind auf drei verschiedene Arten in Involution, indem jedesmal diejenigen zwei Tangenten conjugirte Strahlen bilden, deren Berührungspuncte mit demselben Wendepuncte in gerader Linie liegen. Die Doppelstrahlen der drei Involutionen sind: W_1 und $r w_1$, W_2 und $r w_2$, W_3 und $r w_3$. — Aus [370].

617. Zieht man aus einem auf der harmonischen Polare W eines Wendepunctes w liegenden Puncte m an alle Curven des syzygetischen Büschels Tangentenpaare der Art, dass die Berührungspuncte mit w in gerader Linie liegen [369], so bilden diese Tangentenpaare conjugirte Strahlenpaare einer Involution, deren Doppelstrahlen W und mw sind. — Denn jedes Tangentenpaar ist harmonisch zugeordnet in Bezug auf W und mw [370].

618. Ist $r\, r_1\, r_2$ ein syzygetisches Dreiseit, w ein auf $r_1\, r_2$ liegender Wendepunct, und W dessen harmonische Polare,

so sind W und rw einander harmonisch zugeordnet in Bezug auf rr_1 und rr_2.

Beweis. Da w auf $r_1 r_2$ liegt, so besteht die conische Polare von w in Beziehung auf das Dreiseit $r\,r_1\,r_2$ nach [296] aus der Geraden $r_1\,r_2$ und einer zweiten durch r gehenden Geraden, die in Bezug auf $r\,r_1$ und $r\,r_2$ harmonisch zugeordnet ist zu rw. Ist aber w ein Wendepunct, so ist diese zweite Gerade die harmonische Polare W. (*Hesse* l. c. [615] pag. 261.)

619. Sind demnach $w_1\,w_2\,w_3$ die drei auf $r_1\,r_2$ liegenden Wendepuncte, und $W_1\,W_2\,W_3$ deren harmonische Polaren, so sind W_1, rw_1; W_2, rw_2; W_3, rw_3 conjugirte Strahlenpaare einer Involution, deren Doppelstrahlen rr_1 und rr_2 sind. — [67, 45.]

620. Jede durch einen Wendepunct w eines syzygetischen Büschels gezogene Gerade G berührt eine Curve des Büschels in w als Wendetangente und eine andere einfach in einem anderen Puncte. — Denn erstlich ist durch die Gerade G als Tangente in w nach [587] eine hier berührende Curve des Büschels bestimmt. Da aber diese, wie alle Curven des Büschels, in w einen Wendepunct hat, so ist G die Wendetangente an dieser, und wird daher nach [610] nur noch von einer Curve des Büschels berührt. Das Letztere folgt auch daraus, dass der Berührungspunct jeder von w an irgend eine Curve des Büschels gelegten Tangente auf der für alle Curven gemeinschaftlichen harmonischen Polare von w liegen muss; diese aber schneidet die Gerade G nur in einem Puncte.

621. Wenn bei einem syzygetischen Büschel eine durch einen Wendepunct w gezogene Gerade eine Curve u des Büschels in w als Wendetangente und eine andere Curve v des Büschels einfach in m berührt, so kann allemal u als Fundamentalcurve und v als deren Hesse'sche Curve betrachtet werden.

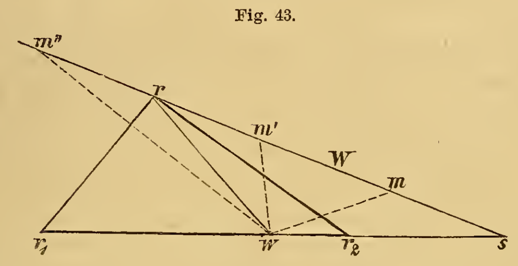
Beweis. Zu jeder Curve 3. O. u gehört eine Hesse'sche Curve, welche mit jener syzygetisch ist und die Eigenschaft hat, dass [463] die in einem Wendepuncte an u gezogene Wendetangente die Hesse'sche Curve berührt. Es giebt aber [620] ausser u nur eine Curve v des syzygetischen Büschels,

welche die Wendetangente berührt, also muss diese die Hesse'sche Curve von u sein.

622. (Ergänzung zu [483]). Jede Curve v eines syzygetischen Büschels kann als Hesse'sche Curve für drei Curven des Büschels als Fundamentalcurven betrachtet werden, und diese drei sind immer von einander verschieden, wenn die gegebene Curve v nicht ein Dreiseit ist.

Beweis. (Fig. 43.) Durch einen Wendepunct w des syzygetischen Büschels gehen drei Gerade wm, wm', wm'', welche die gegebene Curve v berühren (die Puncte $mm'm''$ sind dann zugleich die Durchschnitte von v mit der harmonischen Polare W von w [280]), und von diesen fallen keine zwei zusammen, wenn v nicht ein Dreiseit ist. Diese drei Geraden sind zugleich Wendetangenten in w für drei von einander verschiedene andere Curven u, u', u'' des Büschels [587]; jede der Letzteren kann daher als Fundamentalcurve zu v als einer Hesse'schen Curve betrachtet werden [621]. (*Cremona* art. 143.)

Fig. 43.



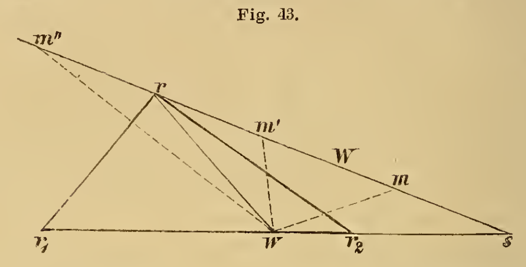
623. Wird ein syzygetisches Dreiseit als eine Hesse'sche Curve betrachtet, so gehört ihr als Fundamentalcurve erstlich dasselbe Dreiseit an [340], und dann noch eine andere Curve des Büschels. Diese ist dadurch bestimmt, dass ihre Wendetangente in einem auf einer Seite des Dreiseits liegenden Wendepuncte durch die gegenüberliegende Ecke des Dreiseits geht.

Beweis 1. S. [483] Bew. 2.

Beweis 2. (Fig. 43.) Das Dreiseit sei $r\, r_1\, r_2$, und w ein auf $r_1\, r_2$ liegender Wendepunct. Die harmonische Polare W desselben geht durch r [365], und ihr Durchschnitt mit $r_1\, r_2$ heisse s. Geht nun die Curve v aus [622] in das Dreiseit

$r\, r_1\, r_2$ über, so fällt von den drei Durchschnitten $m\, m'\, m''$ der harmonischen Polare W mit der Curve v einer nach s, und die beiden anderen fallen nach r. Nun gehört ws, oder was dasselbe ist, $r_1 r_2$ als Wendetangente in w dem Dreiseit $r r_1 r_2$ an, und dieses ist die eine Fundamentalcurve. Ausserdem giebt es also nur noch eine andere, nämlich diejenige, deren Wendetangente in w die Gerade wr ist. (*Cremona* art. 143.)

Fig. 43.



624. Demnach giebt es in einem syzygetischen Büschel ausser den vier Dreiseiten noch vier Curven, von denen jede eines der vier Dreiseite zur Hesse'schen Curve hat. (*Cremona* art. 143.)

625. Eine Curve 3. O. u, deren Hesse'sche Curve ein mit ihr syzygetisches Dreiseit ist, hat die Eigenschaft, dass je drei ihrer Wendetangenten, deren Wendepuncte auf derselben Seite des Dreiseits liegen, sich in einem Puncte schneiden, nämlich in der dieser Seite gegenüberliegenden Ecke. — Denn ist $r\, r_1\, r_2$ das Dreiseit, und $w_1\, w_2\, w_3$ die auf $r_1\, r_2$ liegenden Wendepuncte, so gehen die harmonischen Polaren von $w_1\, w_2\, w_3$ alle drei durch r [365], folglich sind nach [623, Bew. 2] $w_1 r$, $w_2 r$, $w_3 r$ die Wendetangenten an u in w_1, w_2, w_3.

626. In einem syzygetischen Büschel giebt es ausser den vier Dreiseiten noch sechs Curven, von denen jede die Eigenschaft hat, dass ihre zweite Hesse'sche Curve (d. h. die Hesse'sche Curve ihrer Hesse'schen Curve) mit der ursprünglichen Curve selbst zusammenfällt. (*Cremona* art. 143 b.)

Beweis. Nimmt man eines der syzygetischen Dreiseite als Fundamentaldreieck an, so kann man die Curven des syzygetischen Büschels wie in [483] durch die Gleichung

$$u = \mu (x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) - 6 \lambda x_1 x_2 x_3 = 0$$

darstellen. Die vier Dreiseite entsprechen dann den Werthen

$$\mu = 0, \quad \frac{\lambda}{\mu} = \tfrac{1}{2}, \quad \frac{\lambda}{\mu} = \tfrac{1}{2}\alpha, \quad \frac{\lambda}{\mu} = \tfrac{1}{2}\alpha^2,$$

wo α eine imaginäre Cubikwurzel der Einheit bezeichnet. Wird die Hesse'sche Curve $H(u)$ der Curve u durch

$$H(u) = \mu'(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) - 6\lambda' x_1 x_2 x_3 = 0$$

bezeichnet, so gilt nach [483] die Beziehung

$$\frac{\lambda'}{\mu'} = \frac{\mu^3 - 2\lambda^3}{6\lambda^2\mu} = \frac{1 - 2\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3}{6\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2},$$

Stellt man nun die zweite Hesse'sche Curve durch

$$H(H(u)) = \mu''(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) - 6\lambda'' x_1 x_2 x_3 = 0$$

dar, so ist ebenso

$$\frac{\lambda''}{\mu''} = \frac{1 - 2\left(\frac{\lambda'}{\mu'}\right)^3}{6\left(\frac{\lambda'}{\mu'}\right)^2} = \frac{1 - 2\,\frac{(\mu^3 - 2\lambda^3)^3}{216\,\lambda^6\mu^3}}{6\,\frac{(\mu^3 - 2\lambda^3)^2}{36\,\lambda^4\mu^2}} = \frac{216\,\lambda^6\mu^3 - 2(\mu^3 - 2\lambda^3)^3}{36\,\lambda^2\mu(\mu^3 - 2\lambda^3)^2}.$$

Wenn nun diese zweite Hesse'sche Curve mit der ursprünglichen Curve identisch sein soll, so ist dazu nothwendig und hinreichend, dass der gefundene Ausdruck gleich $\frac{\lambda}{\mu}$ sei. Das giebt die Gleichung

$$18\lambda^3\mu\,(\mu^3 - 2\lambda^3)^2 - \mu[108\lambda^6\mu^3 - (\mu^3 - 2\lambda^3)^3] = 0.$$

Diese ist in Beziehung auf $\frac{\mu}{\lambda}$ vom 10., in Beziehung auf $\frac{\lambda}{\mu}$ aber vom 9. Grade. Sie wird daher einmal erfüllt für $\mu = 0$. Dieser Werth liefert eines der syzygetischen Dreiseite, für welches schon die erste Hesse'sche Curve, also auch die zweite mit der ursprünglichen Curve zusammenfällt. Unterdrückt man den Factor μ und setzt zur Abkürzung $\frac{\lambda}{\mu} = k$, so erhält man nach gehöriger Reduction die Gleichung

$$64k^9 - 168k^6 + 12k^3 + 1 = 0.$$

Dieser müssen nun aber auch diejenigen Werthe von k genügen, welche den drei anderen syzygetischen Dreiseiten angehören, nämlich $k = \frac{1}{2}$, $k = \frac{1}{2}\alpha$, $k = \frac{1}{2}\alpha^2$. Die linke Seite der vorigen Gleichung muss sich also durch $8k^3 - 1$ ohne Rest theilen lassen. In der That erhält man durch Ausführung der Division

$$8k^6 - 20k^3 - 1 = 0,$$

und die sechs Wurzeln dieser Gleichung sind nun die Werthe von k, welche den sechs Curven angehören, deren zweite Hesse'sche Curven mit den ursprünglichen zusammenfallen. Man kann diese Gleichung sehr leicht auflösen und erhält, da sich

$$k^3 = \frac{5 \pm 3\sqrt{3}}{4}$$

ergiebt, für k die sechs Werthe

$$(1) \quad \begin{cases} k_1 = \sqrt[3]{\frac{5+3\sqrt{3}}{4}} & k_4 = \sqrt[3]{\frac{5-3\sqrt{3}}{4}} \\ k_2 = \sqrt[3]{\frac{5+3\sqrt{3}}{4}}\,\alpha & k_5 = \sqrt[3]{\frac{5-3\sqrt{3}}{4}}\,\alpha \\ k_3 = \sqrt[3]{\frac{5+3\sqrt{3}}{4}}\,\alpha^2 & k_6 = \sqrt[3]{\frac{5-3\sqrt{3}}{4}}\,\alpha^2. \end{cases}$$

Bemerkung. Man kann mit Hülfe der vorigen Betrachtung entscheiden, wie viele dieser Curven reell sind. Nimmt man nämlich zum Fundamentaldreieck das reelle syzygetische Dreiseit an, so kann man zwar nicht schliessen, dass jedem reellen Werthe von k auch eine reelle Curve angehört; denn der reelle Werth $k = \frac{1}{2}$ liefert das Dreiseit

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 3x_1x_2x_3 =$$
$$(x_1 + x_2 + x_3)(x_1 + \alpha x_2 + \alpha^2 x_3)(x_1 + \alpha^2 x_2 + \alpha x_3) = 0$$

(vgl. [354]), welches aus einer reellen und zwei conjugirt imaginären Geraden besteht, aber man kann zeigen, dass dieses der einzige reelle Werth von k ist, welcher nicht einer reellen Curve angehört. Man erhält nämlich aus [354] für die Wendetangenten an den drei reellen Wendepuncten

$$(0, +1, -1), (-1, 0 + 1), (+1, -1, 0)$$

die Gleichungen

$$2kx_1 + x_2 + x_3 = 0, \quad x_1 + 2kx_2 + x_3 = 0, \quad x_1 + x_2 + 2kx_3 = 0.$$

Diese sind daher reell, so lange k reell ist. Für $k = \frac{1}{2}$ fallen sie in die Verbindungslinie der reellen Wendepuncte $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ zusammen, welche eine Seite des eben erwähnten Dreiseits ist, für jeden anderen Werth von k aber sind sie von einander verschieden. Da nun also die Curve für jeden von $\frac{1}{2}$ ver-

schiedenen reellen Werth von k in den drei reellen Wendepuncten auch reelle Tangenten hat, so ist sie selbst reell. Für imaginäre Werthe von k werden die Wendetangenten in den reellen Wendepuncten imaginär, und daher auch die Curve. Hiernach zeigen die Formeln (1), dass von den sechs in Rede stehenden Curven zwei reell und vier imaginär sind.

627. Die geraden Polaren eines Punctes h in Beziehung auf einen Büschel 3. O. schneiden sich nach [194] in einem Puncte. Ist der Büschel ein syzygetischer, so ist dieser Punct der Tangentialpunct k' von h auf derjenigen Curve des Büschels, welche durch h geht.

Beweis. Die durch h gehende Curve des Büschels heisse v. Dann ist die gerade Polare von h in Beziehung auf v die Tangente an v in h [269]. Diese geht also durch k'. Betrachtet man nun v als eine Hesse'sche Curve und bezeichnet mit u eine der drei zugehörigen Fundamentalcurven und mit h' den dieser entsprechenden conjugirten Pol zu h, so ist nach [459] die gerade Polare von h in Beziehung auf u die Tangente von v in h', und diese geht, da h und h' als conjugirte Pole einen gemeinschaftlichen Tangentialpunct haben, ebenfalls durch k'. Da also in diesem Puncte sich die geraden Polaren von h in Beziehung auf zwei Curven des Büschels schneiden, so ist er der gemeinschaftliche Punct aller geraden Polaren. (*Salmon.* On Curves of the 3^{d} Order. Phil. Trans. Vol. 148 pag. 535. — H. pl. Cvs. pag. 156. — *Cremona* art. 148.)

628. Die conischen Polaren eines Punctes p in Beziehung auf alle Curven eines Büschels 3. O. bilden nach [194] einen Kegelschnittbüschel. Ist der Büschel 3. O. ein syzygetischer, so sind die vier Basispuncte des Kegelschnittbüschels das zu p als Tangentialpunct gehörige Punctquadrupel $p_1\, p_2\, p_3\, p_4$ auf derjenigen Curve des Büschels, welche durch p geht.

Beweis. Da p der gemeinschaftliche Tangentialpunct zu $p_1\, p_2\, p_3\, p_4$ ist, so geht nach [627] die gerade Polare jedes dieser Puncte in Bezug auf jede Curve des syzygetischen Büschels durch p. Dann aber geht nach [273] die conische Polare von p in Bezug auf jede Curve des Büschels sowohl durch p_1, als auch durch p_2, p_3 und p_4. (*Cayley* l. c. [499] pag. 443. *Cremona* art. 148. a.)

629. Ist p ein beliebiger Punct einer Curve 3. O. u, $p_1\, p_2\, p_3\, p_4$ das ihm als Tangentialpunct zugehörige Punctquadrupel, ferner $p'\, p''\, p'''$ das dem vollständigen Viereck $p_1\, p_2\, p_3\, p_4$ angehörige Diagonaldreieck, so ist dieses Dreieck den conischen Polaren des Punctes p bezüglich aller mit u syzygetischer Curven 3. O. conjugirt (d. h. jede Seite ist die Polare der gegenüberliegenden Ecke). — Denn diese conischen Polaren bilden nach [628] einen Kegelschnittbüschel mit den Basispuncten $p_1\, p_2\, p_3\, p_4$ [108]. (*Cremona* art. 148. b.)

630. Wenn die Curven eines syzygetischen Büschels durch die Gleichung $u + \lambda u' = 0$, und die Wendetangenten der Curven u und u' in einem der Wendepuncte durch $J = 0$ und $J' = 0$ dargestellt werden, so hat die Wendetangente der Curve $u + \lambda u' = 0$ in demselben Wendepuncte die Gleichung $J + \lambda J' = 0$.

Beweis. Man kann die Gleichung einer Curve 3. O. nach [245] in der Form $D^2 F + ABC = 0$ darstellen, und dann bedeuten A, B, C drei Tangenten an der Curve, deren Berührungspuncte in der Geraden D, und deren Tangentialpuncte in der Geraden F liegen. Legt man nun die Gerade D in die harmonische Polare W eines Wendepunctes w, so fällt F in die Wendetangente J des letzteren, und A, B, C werden die aus w an die Curve gelegten Tangenten $T_1\, T_2\, T_3$. Die Gleichung der Curve nimmt dann also die Form an:

$$u = W^2 J + T_1\, T_2\, T_3 = 0,$$

und man kann auch umgekehrt schliessen, wenn bei dieser Gleichungsform W die harmonische Polare eines Wendepunctes ist, so ist J die zugehörige Wendetangente. Für eine zweite Curve u' des syzygetischen Büschels bleibt nun die harmonische Polare desselben Wendepunctes ungeändert, während J und die drei Tangenten T sich ändern, daher hat u' die Form

$$u' = W^2 J' + T_1'\, T_2'\, T_3' = 0.$$

Eine beliebige Curve des Büschels erhält also die Gleichungsform

$$u + \lambda u' = W^2 (J + \lambda J') + T_1\, T_2\, T_3 + \lambda\, T_1'\, T_2'\, T_3' = 0.$$

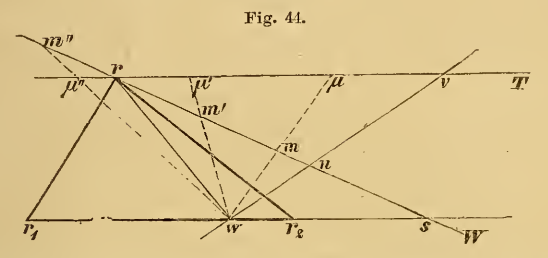
Nun lässt sich hierin der Ausdruck $T_1\, T_2\, T_3 + \lambda\, T_1'\, T_2'\, T_3'$ ebenfalls in drei lineare Factoren zerlegen, denn nimmt man von

vorne herein die Ecke $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ des Fundamentaldreiecks in dem Wendepuncte w liegend an, so sind sowohl $T_1\,T_2\,T_3$ als auch $T_1'\,T_2'\,T_3'$ lineare homogene Functionen von x_1 und x_2 allein, da diese Geraden alle durch w gehen; mithin ist auch der fragliche Ausdruck eine homogene Function von x_1 und x_2 allein, und kann daher in drei lineare Factoren zerfällt werden. Demnach hat die letzte Gleichung wieder die frühere Form, und folglich ist $J + \lambda J' = 0$ die Gleichung der Wendetangente für die Curve $u + \lambda u' = 0$ in dem Wendepuncte w.

§. 5.

631. Die harmonische Polare W eines Wendepunctes w schneide eine Curve des syzygetischen Büschels in m, m', m'' und die Wendetangente derselben Curve in n (Fig. 44).

Fig. 44.



Variirt man die Curve, so beschreibt die Wendetangente einen Strahlenbüschel. Auf der harmonischen Polare bilden daher die Gruppen der Puncte m eine cubische Involution [607], und die Puncte n eine Punctreihe oder eine Involution ersten Grades [48]. Jene mag durch die Gleichung

$$a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3 + \lambda (b_0 x^3 + b_1 x^2 + b_2 x + b_3) = 0,$$

diese durch die Gleichung

$$\alpha_0 y + \alpha_1 + \lambda (\beta_0 y + \beta_1) = 0$$

dargestellt werden, indem x den Abstand eines Punctes m, und y den des Punctes n von einem festen Puncte auf W bedeute. Wird nun aber der Curvenbüschel durch die Gleichung $u + \lambda u' = 0$ dargestellt, so stellt nach [630] $J + \lambda J' = 0$ den Büschel der Wendetangenten dar. Daher gehören in den vorigen beiden Gleichungen diejenigen Werthe von x von y derselben Curve an, welche gleichen Werthen von λ ent-

sprechen, und folglich [53] sind die beiden Involutionen projectivisch in Ansehung derjenigen Punctgruppen m und Puncte n, in denen W irgend eine Curve und deren Wendetangente durchschneidet. Eliminirt man nun λ, so erhält man die Gleichung

$$(a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3)(\beta_0 y + \beta_1)$$
$$- (b_0 x^3 + b_1 x^2 + b_2 x + b_3)(\alpha_0 y + \alpha_1) = 0,$$

welche diese projectivische Beziehung ausdrückt. Setzt man zur Abkürzung

$$a_0\beta_0 - b_0\alpha_0 = a \quad a_1\beta_0 - b_1\alpha_0 = 3b \quad a_2\beta_0 - b_2\alpha_0 = 3c \quad a_3\beta_0 - b_3\alpha_0 = d$$
$$a_0\beta_1 - b_0\alpha_1 = a' \quad a_1\beta_1 - b_1\alpha_1 = 3b' \quad a_2\beta_1 - b_2\alpha_1 = 3c' \quad a_3\beta_1 - b_3\alpha_1 = d',$$

so schreibt sich diese Gleichung

(1) $(ay + a')x^3 + 3(by + b')x^2 + 3(cy + c')x + dy + d' = 0.$

Wegen der besonderen Bedeutung der Puncte m und n werden zwischen den Coefficienten dieser Gleichung gewisse Beziehungen stattfinden. Wir werden diese aufzusuchen haben; zugleich aber kann man die Gleichung vereinfachen, wenn man nicht die auf W stattfindenden Involutionen betrachtet, sondern zwei mit ihnen projectivische auf einer anderen Geraden. Zu dem Ende sei $r_1 r_2$ eine durch w gehende Seite eines syzygetischen Dreiseits, r die gegenüberliegende Ecke desselben, welche also auf W liegt [365]. Die Seite $r_1 r_2$ schneide W in s. Aus dem Wendepuncte w ziehe man nun Strahlen nach den Puncten $m m' m''$, n, s und schneide diese Strahlen durch eine aus r parallel mit $r_1 r_2 s$ gehende Gerade T in $\mu\ \mu'\ \mu''$, ν, ∞, dann bilden die Puncte μ und ν nach [55] zwei unter sich und mit den Puncten m und n projectivische Involutionen. Indem man nun den Punct r als Anfangspunct der Strecken wählt, soll die Gleichung (1) sich auf die auf der Geraden T befindlichen Strecken $x = r\mu$ (oder $r\mu'$, $r\mu''$) und $y = r\nu$ beziehen. Dann entspricht dem Eintreten des Werthes $y = \infty$, dass n auf s fällt, und umgekehrt.

Nun geht aus [623] hervor, dass wenn n auf s fällt, d. h. wenn die betrachtete Curve das Dreiseit $r\, r_1\, r_2$ ist, ein Punct m ebenfalls mit s, und die beiden anderen Puncte m mit r zusammenfallen. Und dasselbe gilt auch von den drei übrigen syzygetischen Dreiseiten. Bezeichnet man diejenigen Ecken

derselben, welche nach [615] auf W liegen, mit r', r'', r''', und die Durchschnitte der ihnen gegenüberliegenden Seiten mit W durch s', s'', s''', so fällt bei diesen jedesmal einer der betreffenden Puncte m auf einen Punct s, und die beiden anderen Puncte m auf das entsprechende r. Zunächst muss nun also die Gleichung (1) so beschaffen sein, dass wenn $y = \infty$ ist, wodurch sie in

$$ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d = 0$$

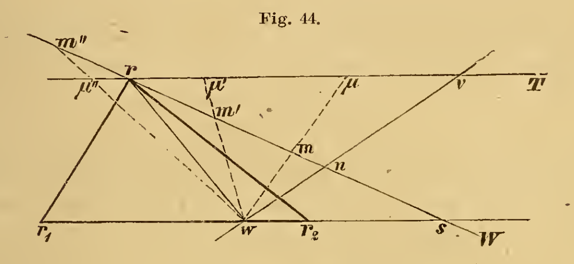
übergeht, eine ihrer Wurzeln unendlich gross, und die beiden anderen Null sind. Das erfordert, dass

$$a = c = d = 0$$

sei. Dadurch geht (1) über in

$$(2.) \qquad a'x^3 + 3(by + b')x^2 + 3c'x + d' = 0.$$

Fig. 44.



Ferner hat man zu beachten, dass nach [614] $r_1 r_2$ die gerade Polare von r in Bezug auf jede Curve des Büschels ist. In Folge dessen ist s nach [168] das harmonische Centrum ersten Grades für den Pol r und in Bezug auf die Puncte m, m', m''. Mithin hat man nach (1) in [168]

$$\frac{rm - rs}{rm} + \frac{rm' - rs}{rm'} + \frac{rm'' - rs}{rm''} = 0$$

oder

$$\frac{1}{rm} + \frac{1}{rm'} + \frac{1}{rm''} = \frac{3}{rs}.$$

Diese Eigenschaft überträgt sich auch auf die Gerade T. Denn nach [54] besteht zwischen den Abschnitten x und x' zweier Geraden, welche den nämlichen Strahlenbüschel schneiden, die Beziehung (wenn, wie hier, $k = k' = 0$ ist)

$$x = \frac{acx'}{c - a'x'},$$

worin a, a', c gewisse Constanten bedeuten. Setzt man nun vorübergehend

$$rm = x_1, \ rm' = x_2, \ rm'' = x_3, \ rs = z,$$

und bezeichnet die entsprechenden Abschnitte auf T mit x'_1 etc., so ist

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = \frac{3}{z}$$

und daher auch

$$\frac{c - a'x'_1}{acx'_1} + \frac{c - a'x'_2}{acx'_2} + \frac{c - a'x'_3}{acx'_3} = \frac{3(c - a'z')}{ac\,z'};$$

hieraus aber folgt

$$\frac{1}{x'_1} + \frac{1}{x'_2} + \frac{1}{x'_3} = \frac{3}{z'}.$$

Nun sind auf der Geraden T $x'_1 \, x'_2 \, x'_3$ die Wurzeln der Gleichung (2), also ist

$$\frac{3}{z'} = -\frac{3c'}{d'},$$

und da $z' = \infty$ ist, so muss $c' = 0$ sein. Damit reducirt sich die Gleichung (2) auf

$$(3) \qquad a'x^3 + 3(by + b')\,x^2 + d' = 0.$$

Weitere Beziehungen zwischen den Coefficienten erhält man aus der Bemerkung, dass die Puncte s', s'', s''' in doppelter Weise erhalten werden können, einmal dadurch, dass zwei Puncte m zusammenfallen, denn dann fällt n auf einen Punct s, oder dass zweitens ein m mit n zusammenfällt, dann tritt dasselbe ein. Im ersten Falle muss y so beschaffen sein, dass die Gleichung (3) für x zwei gleiche Wurzeln hat. Dafür erhält man aus [9] die Bedingung

$$(4) \qquad a'^2 d' + 4(by + b')^3 = 0.$$

Im zweiten Falle wird $x = y$ und das giebt die Gleichung

$$(a' + 3b)\,y^3 + 3b'y^2 + d' = 0.$$

Die beiden letzten Gleichungen müssen also identisch, und daher ihre Coefficienten einander proportional sein. Bezeichnet man demnach mit ϱ einen Proportionalitätsfactor, so ist

$$4b^3 = \varrho\,(a' + 3b)$$
$$12b^2b' = 3\varrho b'$$
$$12bb'^2 = 0$$
$$a'^2d' + 4b'^3 = \varrho d'.$$

Da nun b nicht Null sein kann, weil dann die Gleichung (3) kein y enthalten würde, so muss wegen der dritten Gleichung $b' = 0$ sein; dann liefert die vierte $\varrho = a'^2$, und damit die erste

$$4b^3 = a'^2\,(a' + 3b).$$

Diese Gleichung lässt sich nach und nach in folgende Formen bringen

$$4b^3 = a'^2\,(a' + 2b) + a'^2b$$
$$a'^2\,(a' + 2b) + b\,(a'^2 - 4b^2) = 0$$
$$(a' + 2b)\,(a'^2 + b\,(a' - 2b)) = 0,$$

und wenn man $2a'b - a'b$ statt $a'b$ schreibt

$$(a' + 2b)^2\,(a' - b) = 0.$$

Demnach ist also entweder $a' = -2b$ oder $a' = b$. Um hierüber zu entscheiden, machen wir zunächst in (3) und (4) $b' = 0$, dann erhält man aus (3)

(5) $$a'x^3 + 3byx^2 + d' = 0,$$

als die Gleichung, welche die Projectivität der beiden Involutionen ausdrückt; und wenn mit η der einem Puncte s zugehörige Werth von y bezeichnet wird, aus (4) für diese Puncte

$$4b^3\eta^3 + a'^2\,d' = 0.$$

Diese Gleichung liefert nun für die beiden Annahmen

1) $a' = b$ 2) $a' = -2b$

resp.

(6) 1) $4b\eta^3 = -d'$ 2) $b\eta^3 = -d'$,

und ebenso erhält man aus (5)

(7) 1) $bx^3 + 3byx^2 + d' = 0$ 2) $-2bx^3 + 3byx^2 + d' = 0$.

Bezeichnet man nun mit ξ die Werthe von x, welche $y = \eta$ zugehören, so dass ein ξ einem Puncte s, und die beiden anderen ξ dem entsprechenden Puncte r angehören, so erhält man aus (7) wenn man darin $x = \xi$ und $y = \eta$ macht, und die Gleichungen (6) berücksichtigt

1) $\xi^3 + 3\eta\,\xi^2 - 4\eta^3 = 0$ 2) $-2\,\xi^3 + 3\eta\,\xi^2 - \eta^3 = 0$,

was sich schreiben lässt

(8) 1) $(\xi - \eta)(\xi + 2\eta)^2 = 0$, 2) $(\xi - \eta)^2 (2\xi + \eta) = 0$.

Demnach wird bei der ersten Annahme ein ξ gleich η, und die beiden anderen einander gleich und von η verschieden; nach der zweiten dagegen sind zwei ξ gleich η, und das dritte davon verschieden. Von diesen beiden Resultaten entspricht nur das erste den thatsächlichen Verhältnissen, mithin ist die zweite Annahme zu verwerfen. Es gilt daher die erste der Gleichungen (7), und setzt man darin $\frac{d'}{4b} = -h^3$, so erhält man die Beziehung der Projectivität in ihrer einfachsten Gestalt:

(9) $$x^3 + 3yx^2 - 4h^3 = 0,$$

welche nur noch von einer Constanten, h, abhängig ist. Die drei Puncte $s'\,s''\,s'''$ sind alsdann durch die erste der Gleichungen (6) bestimmt, nämlich

(10) $$\eta^3 - h^3 = 0$$

und da ferner in der ersten der Gleichungen (8) der zweite Factor die Puncte $r'\,r''\,r'''$ liefert, für diese also $\xi = -2\eta$ ist, so sind diese durch die Gleichung

(11) $$\xi^3 + 8h^3 = 0$$

bestimmt. Hieraus geht hervor, dass sowohl die vier Puncte $s\,s'\,s''\,s'''$, als auch die vier Puncte $r\,r'\,r''\,r'''$ vier äquianharmonische [26] Puncte sind. Denn werden vier Puncte dadurch bestimmt, dass ihre Abstände u von einem festen Puncte der Gleichung

$$au^4 + 4bu^3 + 6cu^2 + 4du + e = 0$$

genügen, so sind sie nach [28] vier äquianharmonische Puncte, wenn

(12) $$ae - 4bd + 3c^2 = 0$$

ist. Nun werden die Puncte $s'\,s''\,s'''$ durch die Wurzeln der Gleichung (10) bestimmt, während für s selbst $\eta = \infty$ ist. Man hat also hier

$$a = 0,\ 4b = 1,\ c = 0,\ d = 0,\ e = -h^3$$

und der Gleichung (12) wird genügt. Die Puncte $r'\,r''\,r'''$

bestimmen sich aus (11), und für r ist $\xi = 0$. Man hat demnach

$$a = 1,\ b = 0,\ c = 0,\ d = 2h^3,\ e = 0,$$

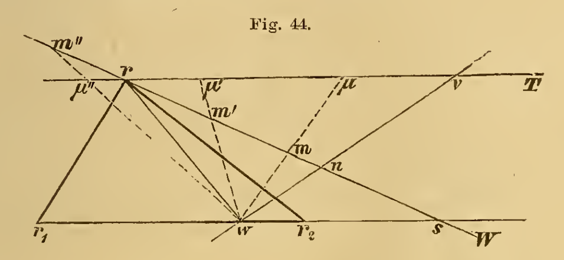
und diese Werthe genügen der Gleichung (12) ebenfalls. Man hat also die Sätze:

Die vier Ecken $r\, r'\, r''\, r'''$ der vier syzygetischen Dreiseite, welche auf der nämlichen harmonischen Polare liegen, sind vier äquianharmonische Puncte.

Die vier Puncte $s\, s'\, s''\, s'''$, in denen die vier Seiten der vier syzygetischen Dreiseite, die durch den nämlichen Wendepunct w gehen, die harmonische Polare W des letzteren schneiden, sind vier äquianharmonische Puncte. (*Cremona* art. 144.)

Die vier Geraden, welche durch denselben Wendepunct gehen, und jede ausserdem noch zwei Wendepuncte enthalten, bilden einen äquianharmonischen Büschel.

Fig. 44.



632. Die Gleichung (9) in [631] gilt für jede Curve des syzygetischen Büschels, also wenn man eine derselben heraushebt, auch für die Hesse'schen Curve der letzteren. Bezeichnet man mit M, M', M'' und N die Puncte, in welchen die harmonische Polare W die Hesse'sche Curve und deren Wendetangente in w schneidet, und mit $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{m}'$, $\mathfrak{m}''$ und $\mathfrak{n}$ die Puncte, in denen die Strahlen $w(M, M', M'', N)$ die Gerade T treffen, und setzt endlich $X = r\mathfrak{m}$ (oder $r\mathfrak{m}'$, $r\mathfrak{m}''$), $Y = r\mathfrak{n}$, so ist nach (9)

$$(13) \qquad X^3 + 3\,YX^2 - 4h^3 = 0.$$

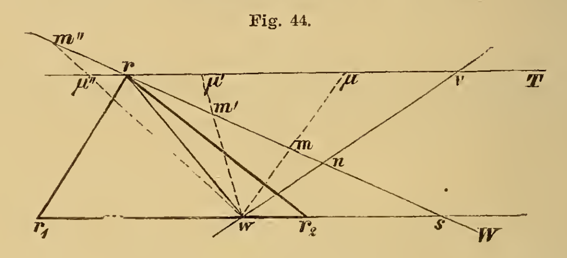
Nun ist aber nach [463] die Wendetangente $w\,n$ der Fundamentalcurve zugleich Tangente an der Hesse'schen Curve, und n der Berührungspunct, es fällt also jedesmal einer der

Puncte M nach n, d. h. der Gleichung (13) muss für $X = y$ genügt werden; also ist

$$(14) \qquad y^3 + 3Yy^2 - 4h^3 = 0.$$

Durch die Wendetangente wird eine Curve des Büschels individualisirt, daher enthält diese Gleichung eine Beziehung zwischen der Fundamentalcurve und ihrer Hesse'schen Curve. Ist die letztere, also Y, gegeben, so liefert diese Gleichung drei Werthe von y; zu derselben Hesse'schen Curve gehören also drei Fundamentalcurven [622]. Zu jedem Werthe von y aber gehört nur ein Werth von Y, also zu jeder Fundamentalcurve nur eine Hesse'sche Curve. Ist $y = 0$, so folgt $Y = \infty$, d. h. fällt n nach r, so fällt N nach s; geht also die Wende-

Fig. 44.



tangente der ursprünglichen Curve durch r, so ist ihre Hesse'sche Curve das Dreiseit $r\,r_1\,r_2$. Die drei anderen Puncte $r'\,r''\,r'''$ sind durch die Gleichung (11) bestimmt; macht man also $y^3 = -8h^3$ und versteht unter h irgend einen der drei Werthe von $\sqrt[3]{h^3}$, so folgt

$$-8h^3 + 12Yh^2 - 4h^3 = 0,$$

also

$$Y = h$$

d. h. die drei zugehörigen Werthe von Y genügen der Gleichung (10), und N fällt in die Puncte $s'\,s''\,s'''$. Hieraus folgt wieder, was schon aus [623] bekannt ist: die vier Curven des Büschels, deren Wendetangenten (in w) durch die vier Puncte $r\,r'\,r''\,r'''$ gehen, haben die vier Dreiseite zu ihren Hesse'schen Curven.

Betrachten wir nun die zweite Hesse'sche Curve, und untersuchen wir, wann diese mit der ursprünglichen Curve zusammenfällt. Der Wendetangente der zweiten Hesse'schen

Curve gehöre der Abschnitt Y' an, betrachtet man dann die erste Hesse'sche Curve als Fundamentalcurve, so hat man in (14) Y statt y zu schreiben und erhält die Gleichung

$$Y^3 + 3\,Y'\,Y^2 - 4h^3 = 0.$$

Fällt nun die zweite Hesse'sche Curve mit der ursprünglichen Curve zusammen, so ist $Y' = y$ und daher

$$Y^3 + 3y\,Y^2 - 4h^3 = 0.$$

Verbindet man hiermit die Gleichung (14) nämlich

$$y^3 + 3\,Yy^2 - 4h^3 = 0,$$

so folgt

$$y^3 - Y^3 + 3\,Yy\,(y - Y) = 0$$

oder

$$(y - Y)\,(y^2 + y\,Y + Y^2 + 3y\,Y) = 0.$$

Ist darin $y = Y$, so fällt n mit N zusammen, d. h. die ursprüngliche Curve ist ein Dreiseit, und für eine solche fällt schon die erste Hesse'sche Curve, und also auch die zweite mit der ursprünglichen zusammen. Nach Unterdrückung des Factors $y - Y$ bleibt dann

$$y^2 + 4y\,Y + Y^2 = 0,$$

und eliminirt man hieraus Y mit Hülfe der Gleichung (14) indem man den daraus folgenden Werth für Y

$$Y = \frac{4h^3 - y^3}{3y^2}$$

substituirt, so erhält man die Gleichung

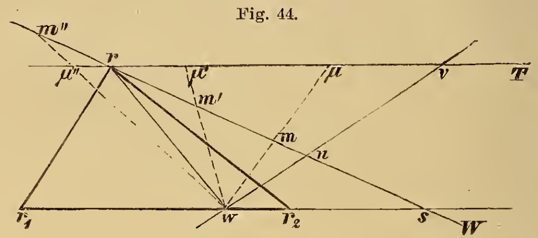
$$(15) \qquad y^6 - 20h^3y^3 - 8h^6 = 0,$$

deren Wurzeln y den sechs Curven des Büschels angehören, welche mit ihren zweiten Hesse'schen Curven zusammenfallen und keine Dreiseite sind. Da diese Gleichung aufgelöst liefert $y^3 = (10 \pm 6\sqrt{3})\,h^3$, so sind zwei ihrer Wurzeln reell, und die vier übrigen imaginär (vgl. [626]). (*Cremona* art. 144 b.)

633. Die vier aus einem Curvenpuncte an die Curve gelegten Tangenten bilden nach [376] einen Strahlenbüschel, dessen Doppelverhältniss constant ist. Indem wir nun die vier von w ausgehenden Tangenten $w\,(m, m', m'', n)$ betrachten,

können wir entscheiden, bei welchen Curven des syzygetischen Büschels der Tangentenbüschel ein harmonischer, und bei welchen ein äquianharmonischer ist. Da nämlich diese Tangenten die Gerade T in den Puncten μ, μ', μ'', ν treffen, welche durch die Abschnitte x (für μ, μ', μ'') und y (für ν) bestimmt sind, so brauchen wir nur das Doppelverhältniss dieser vier Puncte zu untersuchen. Nun sind die Puncte μ

Fig. 44.



gegeben durch die Wurzeln x der Gleichung (9), fügt man dieser also den Factor $x - y$ hinzu, so erhält man eine Gleichung, deren Wurzeln den vier Puncten $\mu\ \mu'\ \mu''\ \nu$ angehören, mithin

$$(x-y)\,(x^3+3yx^2-4h^3)=0$$

d. i.

$$x^4+2yx^3-3y^2x^2-4h^3x+4h^3y=0.$$

Wenn aber vier Puncte durch eine Gleichung von der Form

$$ax^4+4bx^3+6cx^2+4dx+e=0$$

bestimmt sind, so sind sie nach [28] äquianharmonisch wenn

$$ae-4bd+3c^2=0,$$

und nach [27] harmonisch in irgend einer Zuordnung, wenn

$$ace+2bcd-ad^2-eb^2-c^3=0$$

ist. Setzt man also

$$a=1,\ b=\tfrac{1}{2}y,\ c=-\tfrac{1}{2}y^2,\ d=-h^3,\ e=4h^3y,$$

so erhält man als Bedingung, unter welcher $\mu\ \mu'\ \mu''\ \nu$ vier äquianharmonische Puncte sind,

$$4h^3y+2h^3y+\tfrac{3}{4}y^4=\tfrac{3}{4}y\,(y^3+8h^3)=0.$$

Es giebt demnach vier solche Curven, entsprechend den Werthen $y=0$ und $y^3+8h^3=0$, von denen die letzteren der Gleichung (11) genügen. Die Wendetangenten dieser Curven gehen also durch die Puncte $r\ r'\ r''\ r'''$, und diese Curven haben die Dreiseite zu ihren Hesse'schen Curven [623].

Für die Bedingung, dass $\mu \mu' \mu'' \nu$ vier harmonische Puncte sind, erhält man ferner

$$- 2 h^3 y^3 + \tfrac{1}{2} h^3 y^3 - h^6 - h^3 y^3 + \tfrac{1}{8} y^6 = 0$$

oder

$$y^6 - 20 h^3 y^3 - 8 h^6 = 0,$$

und das ist die Gleichung (15), welche die sechs Curven liefert, deren zweite Hesse'schen Curven mit den ursprünglichen zusammenfallen.

Nennt man demnach eine Curve, bei welcher der Tangentenbüschel ein harmonischer oder äquianharmonischer ist, selbst harmonisch oder äquianharmonisch, so hat man die Sätze:

Unter den Curven eines syzygetischen Büschels giebt es vier äquianharmonische, und diese sind diejenigen, deren Hesse'sche Curven aus den vier Dreiseiten bestehen.

In demselben Büschel giebt es ferner sechs harmonische Curven, und diese sind diejenigen, bei denen die zweite Hesse'sche Curve mit der ursprünglichen zusammenfällt. (*Cremona* art. 145.)

634. Die Hesse'sche Curve v einer harmonischen Curve u ist selbst eine harmonische Curve. — Denn in diesem Falle ist $H(u) = v$ und $H(v) = H(H(u)) = u$; mithin auch $H(H(v)) = H(u) = v$. Dagegen sind die beiden anderen Curven u' und u'', welche v ebenfalls zur Hesse'schen Curve haben, keine harmonischen Curven, denn wäre dies der Fall, so müsste $H(H(u')) = H(v) = u'$ sein, während doch $H(v) = u$ ist. Demnach theilen sich die sechs in einem syzygetischen Büschel vorkommenden harmonischen Curven in drei Paare der Art, dass in demselben Paare jede der beiden Curven die Hesse'sche der anderen ist.

Zusätze.

Zu Art. 15. Die hier gegebene Zeichenregel ist nur für die auf die Seiten des Fundamentaldreiecks gefällten Perpendikel von Wichtigkeit. Bei den Coordinaten kann man, da lediglich ihre Verhältnisse in Betracht kommen, die Vorzeichen nach Belieben umkehren, nur muss dies bei allen drei Coordinaten gleichzeitig geschehn.

Zu Art. 212. Die unendlich ferne Gerade [16] schneidet, wie jede andere Gerade eine Curve 3. O. auch in drei Puncten, von denen zwei imaginär sein können; daher hat eine Curve 3. O. entweder einen oder drei sich in's Unendliche erstreckende Zweige. Die Tangenten in diesen unendlich fernen Puncten der Curve sind die Asymptoten der letzteren. Demnach hat eine Curve 3. O. drei Asymptoten, von denen entweder nur eine reell ist, oder alle drei.

Zu Art. 241. Dieser Satz kann auch so ausgesprochen werden: Sind a, b, α drei in gerader Linie liegende Curvenpuncte, so schneidet jeder die Curve in a und b berührende Kegelschnitt dieselbe in zwei Puncten n, p, welche mit dem Tangentialpuncte m von α in gerader Linie liegen.

Zu Art. 316. Man kann auch umgekehrt sagen: Der Punct a', in welchem die gerade Polare eines auf einer Ge-

raden G liegenden Punctes a die Poloconik von G berührt, ist der Pol von G in Bezug auf die conische Polare C_a von a.

Zu Art. 317. Dieser Artikel sollte in §. 1 unmittelbar auf [315] folgen.

Bemerkte Druckfehler.

S. 5	Z. 2 v. o.	statt	$\Delta_y^{n-1}(u_y)$	lies	$\Delta_x^{n-1}(u_y)$.
„ 6	„ 15 v. u.	„	link	lies	links.
„ 27	„ 11 „	„	Werthe	lies	Werthen.
„ 76	in Fig. 15	„	S	lies	K.
„ 108	Z. 14 v. o.	„	Lionville	lies	Liouville.
„ 139	„ 2 v. u.	„	gegebene	lies	gegebenen.
„ 151	„ 1 v. o.	„	Q'	„	Q.
„ 173	„ 18 „	„	Δ_e	„	Δ_c.
„ 193	„ 4 „	„	c''	„	b''.
„ 219	„ 8 v. u.	„	a_2	„	a_3.
„ 221	„ 1 „	„	Puncta	„	Punct a.





